

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

**Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible
dans un tuyau élastique**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 2 (1876), p. 342-344.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2_342_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible
dans un tuyau élastique;*

PAR M. H. RESAL.

M. Marey a publié, en 1875, un Mémoire des plus intéressants intitulé : *Mouvement des ondes liquides*, pour servir à la théorie du pouls. Dans son Mémoire, le savant professeur donne une relation des expériences qu'il a faites sur le mouvement d'un liquide dans un tuyau élastique, et il arrive à poser plusieurs règles relatives à la manière dont les ondes se propagent. Dans cette Note, je n'ai pas d'autre objet que de justifier par l'analyse une partie des résultats auxquels M. Marey est arrivé.

Soient

p_0 la pression extérieure censée constante qui s'exerce sur le tuyau ;

ω_0 la section intérieure du tuyau à l'état naturel ;

R_0 le rayon de cette section ;

p, ω, v la pression, la section et la vitesse, au bout du temps t , correspondant à la longueur s de l'axe du tuyau, mesurée à partir d'une origine déterminée et au rayon intérieur R ;

π le poids spécifique du liquide ;

e l'épaisseur du tuyau ;

E le coefficient d'élasticité de la matière dont il est formé ;

$Ne ds$ la tension normale développée dans la section faite dans le tuyau par un plan mené par son axe et limitée par les deux plans normaux au même axe correspondant aux arcs s et $s + ds$.

Je supposerai que les rapports $\frac{e}{R_0}, \frac{R - R_0}{R_0}$ sont assez petits pour qu'on

puisse en négliger la valeur devant l'unité. En exprimant que la portion du tuyau déterminée par un plan méridien et les deux plans normaux ci-dessus, distants de ds , se trouve en équilibre sous l'action des pressions et des actions élastiques développées dans les sections méridiennes, on reconnaît facilement que l'on a

$$2Ne ds = 2R(p - p_0),$$

d'où

$$N = \frac{R(p - p_0)}{e};$$

mais, si λ désigne la dilatation qu'éprouve la matière du tuyau tangentielle à sa ligne méridienne moyenne, on a

$$N = E\lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{R(p - p_0)}{Ee};$$

mais il est visible que λ n'est autre chose que $\frac{R - R_0}{R_0}$, de sorte que l'on peut écrire

$$(1) \quad \omega = \omega_0 + 2\pi R_0 \cdot R_0 \lambda = \omega_0 \left[1 + \frac{2R_0}{Ee} (p - p_0) \right].$$

Dans ce qui suit nous négligerons la pesanteur, ce qui revient à supposer le tuyau horizontal ou sensiblement horizontal; nous supposons de plus que la vitesse du liquide est assez petite pour qu'on puisse négliger sa seconde puissance et son produit par la dilatation λ .

L'hypothèse des tranches donne la même équation aux différentielles partielles

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{g}{\pi} \frac{dp}{ds},$$

que si le tuyau était indéformable.

Dans le temps dt , il passe par la section ω le volume liquide $\omega v dt$, et par la section qui est distante de ds le volume $\omega v dt + \frac{d\omega v}{ds} dt ds$; il est donc resté entre les plans de ces deux sections le volume $-\frac{d\omega v}{ds} dt ds$,

qui a produit l'augmentation de volume $\frac{d\omega}{dt} dt ds$. Nous avons donc

$$\frac{d\omega v}{ds} = - \frac{d\omega}{dt};$$

d'où, en développant et ayant égard à la relation (1) ainsi qu'au degré d'approximation convenu,

$$(3) \quad \frac{dv}{ds} = - \frac{2R_0}{Ee} \frac{dp}{dt};$$

si l'on élimine p entre les équations (2) et (3), on trouve

$$(4) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{Ee g}{2 R_0 \pi} \frac{d^2 v}{ds^2},$$

équation dont la forme est bien connue et d'où l'on déduit, pour la vitesse de propagation des ondes,

$$V = \sqrt{\frac{Ee g}{2 R_0 \pi}}.$$

Ainsi cette vitesse est égale à la racine carrée du produit des rapports de l'épaisseur au diamètre du tuyau et du coefficient d'élasticité de la matière dont le tuyau est formé à la densité de masse du liquide, ce qui paraît conforme aux résultats de l'expérience.

