JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. FUCHS

Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 158-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__158_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite;

PAR M. L. FUCHS.

Mon Mémoire traite des équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques, et d'une application nouvelle de la théorie des invariants.

Chaque intégrale de l'équation différentielle est une fonction linéaire et homogène de deux solutions fondamentales y_1, y_2 de cette équation, avec des coefficients constants. Une intégrale quelconque, algébrique, étant η toute fonction symétrique des diverses valeurs qu'admet η est une forme binaire des deux quantités y_1 et y_2, qui est elle-même une fonction rationnelle de la variable indépendante z. Mais, comme elle peut être un produit de puissances entières d'autres formes binaires, il est nécessaire de considérer ces formes binaires composées des quantités y_1, y_2, qui représentent des racines de fonctions rationnelles. Désignons leur complexe par Φ.

Si l'on peut satisfaire à l'équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle, les formes linéaires seront du plus petit degré possible, parmi celles du complexe Φ; en général, nous allons chercher le degré minimum N qui puisse être attribué à une forme de ce complexe.

Comme y_1 et y_2 se changent, par les divers chemins qu'on peut faire suivre à la variable z, en des fonctions linéaires et homogènes de ces mêmes quantités, avec des coefficients constants, les diverses valeurs qui en résultent, pour une forme composée de y_1 et y_2, s'obtiennent au moyen de substitutions linéaires effectuées sur y_1 et y_2. En m'appuyant sur cette remarque, je démontre que les covariants d'une forme du complexe Φ représentent aussi des racines de fonctions rationnelles. De là résulte que les covariants de la forme du degré minimum N, dont les degrés sont inférieurs à N, doivent tous s'évanouir identiquement. On pourrait, par suite, obtenir facilement le nombre N, si l'on possédait la solution du problème suivant : *Trouver l'expression algébrique des formes binaires de degré m, dont tous les covariants de degré moindre que m disparaissent identiquement.* Mais ce problème n'étant pas encore résolu, voici la marche que j'ai suivie pour déterminer N.

Parmi les racines d'une équation algébrique irréductible qui satisfont à l'équation différentielle, je distingue celles dont les quotients ne sont pas constants, en désignant leur ensemble par le nom de *système réduit des racines.* Chaque forme du complexe Φ, composée des termes d'un système réduit comme facteur, étant aussi appelée *forme primaire,* je trouve que la forme de degré minimum N représente, aussi bien que son covariant hessien, une forme primaire. Je conclus ensuite, de l'expression même du covariant du hessien, que N ne peut être supérieur à 12; puis, au moyen d'une réduction ultérieure, que N n'a qu'une des valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Donc, pour que l'équation différentielle possède des intégrales algébriques, il faut qu'une forme dont le degré est l'un de ces nombres soit une racine d'une fonction rationnelle de la variable indépendante; et le théorème réciproque a lieu, en exceptant le cas de $N = 2$.

Pour reconnaître s'il y a des formes qui représentent des racines de fonctions rationnelles, j'ai employé deux méthodes : l'une ramène à la question de satisfaire à une équation différentielle linéaire, par la racine d'une fonction rationnelle. En effet, toute forme en y_1, y_2, et du degré m, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $m + 1$; donc généralement, pour que l'équation différentielle donnée possède des intégrales algébriques, il faut et il suffit qu'une équation différentielle linéaire déterminée, et dont l'ordre ne surpasse point le nombre 12, puisse être satisfaite par la racine d'une fonction rationnelle. Mais la question de satisfaire à une équation différentielle par la racine d'une fonction rationnelle se réduit à la question élémentaire de reconnaître si un système d'équations linéaires admet des solutions finies. Ensuite je montre comment on peut parvenir à ce système d'équations linéaires, sans former effectivement l'équation différentielle d'ordre $N + 1$, mentionnée plus haut.

La seconde des deux méthodes dont j'ai parlé s'appuie sur une recherche directe des changements qu'éprouvent les formes composées de y_1 et y_2, par les chemins divers de z, en employant les coefficients de ces relations linéaires et homogènes, qui lient les systèmes fondamentaux d'intégrales appartenant aux divers points singuliers de l'équation différentielle, relations que j'ai développées dans le *Journal de M. Borchardt*, tome LXXV, page 208.

Enfin j'ajoute quelques théorèmes particuliers, parmi lesquels je ne mentionne ici que le suivant : *Les nombres rationnels qui représentent les racines des équations fondamentales déterminantes, appartenant aux divers points singuliers de l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y$ *et à* $z = \infty$, *étant réduits à leur plus simple expression, si l'un des dénominateurs surpasse le nombre* 10, *la proposée n'a pas d'intégrale algébrique, à moins cependant que la racine d'une fonction rationnelle ne satisfasse à cette équation ou à l'équation en* y^2.

Heidelberg, janvier 1876.