JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Sur la méthode des moindres carrés

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 75-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__75_0>

Sur la méthode des moindres carrés;

PAR M. H. LAURENT.

Il existe, comme l'on sait, deux manières de justifier la méthode des moindres carrés. Si l'on désigne par $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ la probabilité que, dans une observation, l'erreur sera comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ est ce que l'on appelle *facilité de l'erreur* ε. Laplace justifie la méthode des moindres carrés, quelle que soit la forme de la fonction $\varphi(\varepsilon)$, pourvu, bien entendu, que cette fonction $\varphi(\varepsilon)$ tende vers zéro pour $\varepsilon = \pm\infty$, et cela assez rapidement; mais la théorie de Laplace et de ses disciples suppose essentiellement que le nombre des observations soit très-grand. Pour de très-grands nombres d'observations, les premiers termes du développement de $\varphi(\varepsilon)$ jouent seuls un rôle important, en sorte que cette fonction se réduit sensiblement à la forme $\frac{h}{\sqrt{\pi}}(1 - \varepsilon^2 h^2)$, ou, ce qui revient au même, à la forme

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2},$$

et cela aux termes du quatrième ordre près. Il résulte de là que, si la facilité de l'erreur ε était précisément $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$, la méthode des moindres carrés serait justifiée, quel que soit le nombre des observations. Gauss et les Allemands admettent *a priori* que la facilité de l'erreur ε est $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$, et ils justifient l'emploi de cette fonction en admettant que la moyenne *arithmétique* de plusieurs mesures inexactes est la valeur la plus probable de la quantité mesurée. Or rien ne justifie *a priori* une telle hypothèse; tout, au contraire, porte à la rejeter, non pas immédiatement peut-être, mais ses conséquences sont généralement absurdes. Ainsi la facilité $\varphi(\varepsilon)$ de l'erreur ε doit être nulle pour des valeurs finies de ε, au moins dans un grand nombre de circonstances. Je défie l'observateur le moins exercé, vivrait-il plus de mille ans, en mesurant jour et nuit la même longueur d'environ 10 mètres, de commettre une erreur dépassant 1 mètre! Ainsi les erreurs dépassant une certaine limite sont impossibles et non pas peu probables. Quel est l'astronome qui commettrait une erreur de 361 degrés sur la mesure d'un angle?

J'ai entrepris, afin de renverser l'hypothèse de Gauss, une série de 1444 observations qui avaient pour but de me faire connaître approximativement la facilité de l'erreur ε dans un cas particulier. La grandeur mesurée était un angle de 16 degrés environ, formé par les rayons visuels émanant d'un endroit fixe et se dirigeant vers deux objets très-éloignés. L'instrument dont j'ai fait usage ne comportait pas d'erreur systématique; il donnait les angles à une minute près; c'était un pantomètre à lunette. La graduation du limbe, que j'ai étudiée avec soin, ne m'a pas semblé comporter d'erreur de division en promenant le vernier sur elle. L'instrument, muni de deux niveaux, permettait d'opérer dans un plan horizontal; d'ailleurs un défaut d'horizontalité de 2 degrés n'eût pas donné une erreur appréciable de 1 minute dans les résultats de l'observation. Enfin les objets visés étaient assez éloignés pour que l'erreur de mise en station descendît bien au-dessous de la minute.

L'instrument donnant la minute, toute erreur ε observée, ou, si l'on veut, la différence entre l'angle exact et l'angle observé, était un nombre rond ε de minutes, et par suite l'erreur vraie était, en réalité, comprise entre $(\varepsilon - \frac{1}{2})'$ et $(\varepsilon + \frac{1}{2})'$. Cela posé, soit n le nombre de fois que l'on observe l'erreur ε_n sur un nombre N d'observations. $\frac{n}{N}$ est la probabilité que l'erreur est comprise entre $\varepsilon_n - \frac{1}{2}$ et $\varepsilon_n + \frac{1}{2}$, et il y a, comme l'on sait, la probabilité $\Theta\left[l\sqrt{\frac{N^3}{2n(N-n)}}\right]$ ou

$$\Theta(\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma e^{-\gamma^2}d\gamma$$

que cette probabilité diffère de $\frac{n}{N}$ de moins de l. Nous prendrons

$\gamma = 1{,}82$; alors nous aurons

$$\Theta(\gamma) = 0{,}99.$$

Il y aura alors 100 à parier contre 1 que $\frac{n}{N}$ sera la probabilité de l'erreur ε_n avec une erreur moindre que l, donnée par la formule

$$1{,}82 = l\sqrt{\frac{N^3}{2n(N-n)}};$$

d'où l'on tire l'expression de l'erreur maxima

$$l = 1{,}82\sqrt{\frac{2n(N-n)}{N^3}}. \tag{1}$$

Si l'on remplaçait le coefficient 1,82 par 2,3,..., il y aurait 1000 à parier contre 1 que l'erreur commise sur $\frac{n}{N}$ serait moindre que l,....

Voici maintenant les résultats bruts auxquels je suis parvenu : $N = 1444$.

L'erreur......	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a été observée un nombre de fois...	4	16	26	53	103	247	343	294	208	85	26	22	11	6

Ce que j'appelle erreurs 0, 1, 2,..., dans ce tableau, sont les erreurs qui résulteraient d'une première valeur grossièrement approchée de l'angle mesuré, à l'aide d'un nombre restreint d'observations.

Nous allons nous occuper maintenant de la rectification des nombres fournis par l'expérience. Commençons par diviser tous ces nombres par $N = 1444$, afin d'avoir la probabilité de chaque erreur; poussons le calcul seulement aussi loin que la formule (1) nous engagera à le faire. Ainsi, par exemple, nous trouvons que l'erreur 0 s'est produite 247 fois; la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{247}{1444} \quad \text{à} \quad 1{,}82\sqrt{\frac{2.247.(1444-247)}{1444^3}} \text{ près,} \quad \text{ou à} \quad 0{,}02 \text{ près.}$$

Nous pouvons alors dresser le tableau suivant :

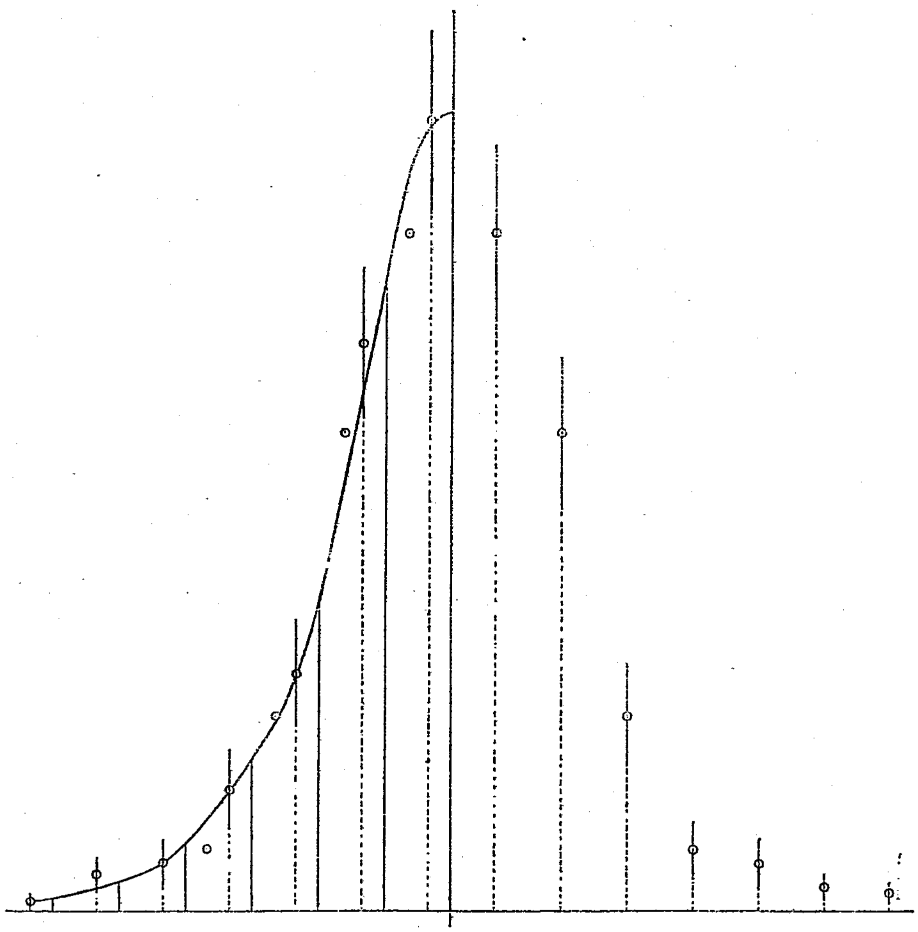
Erreurs.	Probabilités de ces erreurs.	Erreurs de ces probabilités.
—5	0,003	0,003
—4	0,011	0,006
—3	0,018	0,009
—2	0,036	0,012
—1	0,071	0,017
0	0,171	0,025
1	0,238	0,028
2	0,204	0,027
3	0,144	0,023
4	0,059	0,015
5	0,018	0,009
6	0,015	0,008
7	0,008	0,006
8	0,006	0,004

Imaginons que l'on trace deux courbes ayant la même abscisse ε_n, et pour ordonnées $\frac{n}{N} - e_n$ et $\frac{n}{N} + e_n$, e_n désignant l'erreur maxima commise en prenant $\frac{n}{N}$ pour probabilité de l'erreur ε_n. La courbe dont l'ordonnée serait la probabilité vraie de l'erreur ε_n passera entre ces deux-ci.

J'ai cherché à tracer cette courbe le plus régulièrement possible et de telle sorte qu'elle fût symétrique par rapport à l'ordonnée correspondant à l'abscisse 1,33, moyenne des erreurs. Une moitié de cette courbe est représentée sur la figure ci-contre; rectifiant alors les résultats de l'expérience à l'aide de cette courbe, on obtient les résultats consignés dans le tableau suivant (les ordonnées pleines sont les ordonnées rectifiées; les ordonnées ponctuées sont fournies par l'expérience, et la partie pleine correspond, par son origine et son extrémité, aux valeurs $\frac{n}{N} - e_n$ et $\frac{n}{N} + e_n$) :

Erreurs.....	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
Probabilités .	0,241	0,189	0,090	0,045	0,019	0,008	0,003

Telle est la loi de probabilité qui semble résulter de nos observations, et les résultats qui précèdent, si l'on admet la loi de continuité dans



les erreurs, paraissent exacts, à un ou deux millièmes près. Or, d'après la loi de Gauss, la probabilité de l'erreur ε_n est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon_n-\frac{1}{2}}^{\varepsilon_n+\frac{1}{2}} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{h(\varepsilon_n-\frac{1}{2})}^{h(\varepsilon_n+\frac{1}{2})} e^{-\gamma^2}\,d\gamma,$$

c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}\{\Theta[h(\varepsilon_n+\tfrac{1}{2})]-\Theta[h(\varepsilon_n-\tfrac{1}{2})]\}.$$

Pour $\varepsilon_n = 0$, on a simplement

$$\Theta\left(\frac{h}{2}\right).$$

Si l'on fait $\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}241$, on trouve

$$\frac{h}{2} = 0{,}217, \quad h = 0{,}434,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}241, && \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{3h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}201,\\
&\Theta\left(\frac{3h}{2}\right) = 0{,}643, && \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{5h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{3h}{2}\right) = 0{,}116,\\
&\Theta\left(\frac{5h}{2}\right) = 0{,}875, && \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{7h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{5h}{2}\right) = 0{,}046,\\
&\Theta\left(\frac{7h}{2}\right) = 0{,}968, && \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{9h}{2}\right) - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{7h}{2}\right) = 0{,}013,\\
&\Theta\left(\frac{9h}{2}\right) = 0{,}994.
\end{aligned}$$

Ainsi les probabilités des erreurs observées seraient :

Erreurs.	Observations.	Gauss.	Différences.
0	0,241	0,241	+ 0,000
± 1	0,189	0,201	+ 0,012
± 2	0,090	0,116	+ 0,026
± 3	0,045	0,046	+ 0,001
± 4	0,019	0,013	− 0,006

Sans doute la dernière colonne n'accuse pas de bien grandes différences, et il est bien clair, pour des raisons que nous avons déjà développées, que la loi de Gauss est une loi approximative; mais la différence 0,026, relative à l'erreur $\pm$ 2, paraît assez forte pour que l'on puisse révoquer en doute l'exactitude de la loi de Gauss, et, par suite, pour qu'il soit prudent de rejeter la méthode des moindres carrés quand on n'a qu'un petit nombre d'observations.