JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Mémoire sur les fonctions de Legendre

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 373-398.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__373_0>

Mémoire sur les fonctions de Legendre;

PAR M. H. LAURENT.

I. — *Préliminaires.*

Le but de ce Mémoire est de donner une théorie des fonctions X_n, déduite d'un seul principe, et de montrer comment ce principe peut conduire à la découverte de nouvelles propriétés des polynômes de Legendre.

M. Heine a publié en Allemagne un Traité complet des fonctions X_n et de leurs conjuguées; mais ce traité pourrait être considérablement simplifié en faisant usage du calcul des résidus : c'est ce que je me propose de faire ici.

J'appellerai fonction X_n le coefficient de z^n dans le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; en sorte que l'on aura

$$(1) \qquad (1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots.$$

La manière la plus simple d'effectuer le développement consiste à appliquer la formule de Lagrange au développement de la racine $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-2xz+z^2}\right)$ de l'équation

$$u = x + z\frac{u^2-1}{2};$$

on trouve alors

$$\frac{1-\sqrt{1-2zx+z^2}}{2} = x + \frac{z}{2}(x^2-1) + \frac{z^2}{2.4}\frac{d}{dx}(x^2-1)^2 + \ldots,$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$(2) \; (1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) + \ldots + \frac{z^n}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n + \ldots;$$

cette formule comparée avec (1) donne

$$(3) \qquad X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Pour trouver les conditions de convergence de la série (1), on peut mettre le premier membre sous la forme suivante : on pose $x = \cos\gamma$, et l'on a

$$\begin{aligned}(1-2z\cos\gamma+z^2)^{-\frac{1}{2}} &= \left(z-e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(z-e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \left(1-ze^{\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-ze^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Quand γ est réel, on voit que la convergence est assurée dès que le module de z est moindre que l'unité; mais on peut préciser les limites de convergence en observant que, si l'on fait

$$2x = y + \frac{1}{y},$$

on a

$$(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-zy)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour qu'il y ait convergence, il faut que l'on ait à la fois

$$\text{mod.}\,zy < 1, \quad \text{mod.}\frac{z}{y} < 1,$$

ou bien

$$\text{mod.}\,z < \text{mod.}\,y \quad \text{et} \quad < \text{mod.}\frac{1}{y}.$$

Soit donc ω le plus petit des deux nombres $\text{mod.}\,y$ et $\text{mod.}\frac{1}{y}$; on aura

$$\text{mod.}\,z < \omega.$$

L'équation $\text{mod.}\,z = 0$ servira à délimiter la région de convergence pour la variable x. Posons

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1}, \quad y = \omega e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{y} = \omega^{-1}e^{-\theta\sqrt{-1}};$$

nous aurons

$$2\xi = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)\cos\theta, \quad 2\eta = \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\sin\theta\ ;$$

d'où, par l'élimination de θ,

$$\frac{4\xi^2}{\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2} + \frac{4\eta^2}{\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)^2} = 1.$$

On voit donc que, si z varie dans l'intérieur d'un cercle de rayon ω décrit de l'origine comme centre, la série (1) sera convergente si x varie à l'intérieur d'une ellipse concentrique ayant pour demi-axes

$$\frac{\omega+\omega^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega-\omega^{-1}}{2}.$$

Les foyers de cette ellipse ont pour abscisses ± 1; donc toutes les ellipses de convergence relatives à la variable x et correspondant à un cercle donné de convergence pour la variable z sont homofocales.

J'arrive maintenant à l'étude des propriétés des fonctions X_n. Ces fonctions affectent deux formes principales qui se déduisent immédiatement de leur définition.

1° X_n étant le coefficient de z^n dans $(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, on a, d'après une formule aujourd'hui bien connue de Cauchy,

$$(4) \qquad X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2zx+z^2}}.$$

L'intégrale est prise autour de l'origine.

2° La formule (3) de Rodrigues conduit également à une intégrale définie; on a en effet

$$(5) \qquad X_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{1}{2^n}\int\frac{(z^2-1)^n\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

L'intégrale est prise autour du point x.

Ce sont ces formules (4) et (5) qui vont nous fournir toute la théorie des fonctions X_n.

II. — *Conséquences de la première formule fondamentale.*

Si dans la formule (4) on suppose $x = \cos\gamma$ et γ réel, on pourra supposer le module de z un peu inférieur à l'unité; mais, au lieu d'intégrer le long du contour circulaire qui en résulterait, on peut aussi intégrer le long d'un contour circulaire de rayon infini, pourvu que l'on ajoute à l'intégrale ainsi obtenue l'intégrale prise le long d'un contour enveloppant les deux points critiques $z = e^{\gamma\sqrt{-1}}$ et $e^{-\gamma\sqrt{-1}}$, situés tous deux à la distance 1 de l'origine. Le contour que nous choisirons se composera de deux arcs de cercle concentriques de rayons $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ limités dans le voisinage des points critiques, et sera terminé par deux petits cercles décrits autour de ces points critiques avec des rayons infinitésimaux. Les intégrales relatives à ces petits contours circulaires seront nulles. En faisant tendre ε vers zéro et en observant que le radical contenu sous le signe $\int$ change de signe quand on tourne autour d'un point critique, on aura pour la valeur de X_n

$$X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + z^2}} + 2\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + x^2}}\right);$$

la première intégrale est prise le long d'un contour circulaire infini; elle est nulle comme l'on voit; la seconde est prise le long d'un arc de cercle décrit de l'origine comme centre, et limité aux points $e^{\gamma\sqrt{-1}}$, $e^{-\gamma\sqrt{-1}}$. On intégrera le long de cet arc de cercle en posant

$$z = e^{\theta\sqrt{-1}};$$

en prenant pour limites $-\gamma$ et $+\gamma$, on aura donc

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\theta}{e^{n\theta\sqrt{-1}}\sqrt{1 - 2\cos\gamma\, e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{2\theta\sqrt{-1}}}},$$

ou

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\theta}{e^{(n+\frac{1}{2})\theta\sqrt{-1}}\sqrt{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}} - 2\cos\gamma}},$$

ou enfin

$$(6) \qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\theta \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\gamma)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{d\theta \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\gamma)}}.$$

Cette formule permet de calculer la fonction X_n pour de grandes valeurs de n; en effet, si l'on pose $\theta = \gamma - v$, on a

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} \frac{dv \cos(n+\frac{1}{2})(\gamma - v)}{\sqrt{2(\cos\overline{\gamma - v} - \cos\gamma)}}.$$

Cette intégrale n'a de valeur sensible que pour les petites valeurs ε de v, et l'on peut écrire, à une quantité d'ordre supérieur près par rapport à $\frac{1}{n}$,

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dv \cos(n+\frac{1}{2})(\gamma - v)}{\sqrt{2v\sin\gamma}},$$

ou

$$X_n = \frac{2}{\pi}\left[\cos(n+\tfrac{1}{2})\gamma \int_0^{\infty} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})v}{\sqrt{2v\sin\gamma}} dv + \sin(n+\tfrac{1}{2})\gamma \int_0^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})v\,dv}{\sqrt{1 v\sin\gamma}}\right].$$

Or on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega b}{\sqrt{\omega}}\,d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega b\,d\omega}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}.$$

La formule précédente pourra donc s'écrire

$$X_n = \frac{2}{\pi}\left[\cos(n+\tfrac{1}{2})\gamma + \sin(n+\tfrac{1}{2})\gamma\right]\sqrt{\frac{2\pi(n+\frac{1}{2})^{-1}}{2\sin\gamma}},$$

ou enfin exactement

$$(7) \qquad X_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{n\sin\gamma}}\left[\cos(n+\tfrac{1}{2})\gamma + \sin(n+\tfrac{1}{2})\gamma\right](1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité nulle pour $n = \infty$.

Supposons, en second lieu, x quelconque, et, au lieu de l'arc de cercle considéré tout à l'heure substituons le chemin rectiligne qui va de la racine $x - \sqrt{x^2 - 1}$ de l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha x + 1 = 0$$

à l'autre racine $x + \sqrt{x^2 - 1}$; nous trouverons, par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire,

$$X_n = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + z^2}},$$

et l'intégrale est prise le long du contour rectiligne dont nous venons de parler. Pour effectuer l'intégration, nous poserons tout naturellement

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi, \quad dz = -\sin\varphi\sqrt{x^2 - 1}\, d\varphi,$$

et nous prendrons pour limites 0 et π; nous aurons alors

$$(8) \qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}};$$

si l'on avait d'abord changé z en $\frac{1}{z}$ dans la formule (4), on aurait eu

$$X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz . z^n}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}.$$

Cette formule, dans laquelle l'intégrale est prise dans le sens rétrograde et le long d'un cercle de grand rayon, se transforme comme la précédente en

$$(8\ bis) \qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n\, d\varphi.$$

Les formules (8) et (8 *bis*) sont dues à Laplace, qui les a démontrées d'une façon toute différente.

Si l'on essaye de calculer X_n par la formule (8), les règles les plus élémentaires du Calcul intégral conduisent à chercher une formule de réduction, laquelle ne sera autre chose qu'une équation aux différences ayant pour solution X_n. Cherchons cette formule de réduction. Posons

$$U_{n+1} = \int \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+2}},$$

on a

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}} = \frac{\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}} + (n+1)\frac{\sin^2\varphi\,(x^2-1)}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+2}}.$$

Pour simplifier, nous poserons

$$R = x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi,$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{R^{n+1}} &= \frac{R-x}{R^{n+1}} + (n+1)\frac{(x^2-1)-(x^2-1)\cos^2\varphi}{R^{n+2}}\\ &= \frac{1}{R^n} - \frac{x}{R^{n+1}} - (n+1)\frac{R^2-2x^2-2x\sqrt{x^2-1}\cos\varphi+1}{R^{n+2}},\end{aligned}$$

ou enfin

$$(a) \qquad \frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{R^{n+1}} = (2n+1)x\frac{1}{R^{n+1}} - \frac{n+1}{R^{n+2}} - \frac{n}{R^n};$$

si l'on intègre par rapport à φ, on a, à une constante près,

$$(b) \qquad \frac{\sin\varphi\sqrt{x^2-1}}{(2+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}} = (2n+1)\,xU_n - (n+1)\,U_{n+1} - nU_{n-1},$$

et entre les limites zéro et π on a

$$(9) \qquad (2n+1)\,xX_n - (n+1)\,X_{n+1} - nX_{n-1} = 0.$$

Telle est l'équation aux différences, à laquelle nous voulions parvenir. X_n n'est pas la seule solution de cette équation, et il doit exister une autre solution Ξ_n, telle que $CX_n + C'\Xi_n$ en soit la solution la plus générale, C et C' désignant deux constantes ou fonctions périodiques.

On trouvera la solution Ξ_n très-simplement, en repassant attentivement les calculs que nous venons de faire; on s'apercevra alors sans peine que les formules (a) et (b) auraient encore lieu si, au sinus et au cosinus circulaires de la variable φ on substituait le sinus et le cosinus hyperboliques de cette variable; mais, pour en conclure la formule (9), il faudrait prendre pour limites d'intégration zéro et ∞ ; on a donc, en posant

$$(10) \qquad \Xi_n = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x+\cosh\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

la relation

$$(2n+1)\Xi_n x - (n+1)\Xi_{n+1} - n\Xi_{n-1} = 0;$$

Ξ_n sera connu dès que l'on donnera Ξ_0 et Ξ_1. Or on a

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi}{a+b\cosh\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b},$$

et, en différentiant par rapport à a,

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi}{(a+b\cosh\varphi)^2} = (a^2-b^2)^{\frac{3}{2}} a \log\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b} + \frac{1}{a^2-b^2};$$

si dans ces formules on fait $a=x$, $b=\sqrt{x^2-1}$, on a, en vertu de (10),

$$\Xi_0 = \log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$\Xi_1 = x\log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1.$$

Ξ_n est donc connu par la voie récurrente.

En étudiant l'intégrale (8 *bis*) comme on a étudié l'intégrale (8), on parvient à reconstituer la formule (9), et l'on vérifie que la formule

$$\Xi_n = \int_0^\alpha (x-\sqrt{x^2-1}\cosh\varphi)^n d\varphi,$$

$$\alpha = \log\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

satisfait encore à la formule (9), tout en étant identique avec la fonction Ξ_n que nous avons rencontrée tout à l'heure.

III. — *Conséquences de la formule* (5).

La formule (5), équivalant au fond à celle de Rodrigues, contient presque toutes les propriétés de la fonction X_n. Ainsi, en posant

$$y = \int (z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+1)} dz,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \int (n+1)(z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+2)} dz,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int (n+1)(n+2)(z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+3)} dz;$$

or, si l'on considère la fonction

$$F(z) = (z+1)^{n+1}(z-1)^{n+1}(z-x)^{-(n+2)} = (z^2-1)^{n+1}(z-x)^{-(n+2)},$$

on aura, en différentiant par rapport à z,

$$F'(z) = (z^2-1)^n (z-x)^{-(n+3)}[(n+1)(z-1)(z-x) \\ + (n+1)(z+1)(z-x) - (n+2)(z^2-1)],$$

ou

$$F'(z) = (z^2-1)^n (z-x)^{-(n+3)}[n(z-x)^2 - 2x(z-x) - (n+2)(x^2-1)];$$

si l'on intègre le long d'un contour fermé contenant le point x, on a, eu égard aux formules précédentes,

$$0 = ny - 2x\frac{dy}{dx}\frac{1}{n+1} - (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{n+1};$$

or y est égal à X_n, en vertu de la formule (5), à un facteur numérique près; donc X_n satisfait à l'équation précédente, que l'on peut écrire

$$(11) \qquad \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right] = n(n+1)y.$$

D'après la théorie des équations linéaires, on sait que, X_n étant une solution de cette équation, la solution la plus générale sera

$$y = C_1 X_n + C_2 X_n \int \frac{dx}{X_n^2(x^2 - 1)},$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

Le calcul qui nous a conduit à la formule (11) réussirait encore si, au contour fermé d'intégration relatif à la formule (5), on substituait un contour rectiligne allant du point -1 au point $+1$; on en conclut que l'intégrale

$$y = \int_{-1}^{+1} (z^2 - 1)^n (z - x)^{-(n+1)} dz$$

satisfait à l'équation (11). Et en effet les calculs seront identiquement les mêmes, et l'intégrale de $F'(z)$ s'évanouira aux limites, comme s'il s'agissait d'un contour fermé; car $F(-1) = F(+1) = 0$.

Il est bon d'observer que, pour $n = 0$ et $n = 1$, on a successivement

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z - x} = 2 \log \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}},$$

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{z^2 - 1}{(z - x)^2} dz = 4x \log \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} + 4,$$

ce qui fait pressentir une liaison assez intime entre ces intégrales et les fonctions que nous avons désignées plus haut par Ξ_n.

Si dans les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} X_m F(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} X_m X_n dx, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx,$$

où $F(x)$ désigne un polynôme entier de degré moindre que m, on remplace X_m par sa valeur tirée de la formule de Rodrigues, à savoir

$$X_m = \frac{1}{2.4\ldots 2m} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2 - 1)^m,$$

et si l'on intègre par parties, on trouve sans difficulté

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1} X_m F(x)\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx = 0 \quad \text{pour} \quad m \lessgtr n, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}; \end{cases}$$

on déduit de là cette conséquence importante : si l'on a identiquement

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_m X_m,$$

$A_1, A_2, \ldots$ désignant des constantes, on aura forcément

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) X_n\,dx,$$

en multipliant par $X_n\,dx$ et en intégrant de -1 à $+1$.

La formule de Rodrigues conduirait à une foule d'autres formules plus ou moins connues, mais dont l'importance n'est pas assez grande pour que nous les reproduisions ici.

Mais, avant de terminer ce paragraphe, rappelons que les valeurs de $X_0, X_1, \ldots, X_n$, pour $x=1$, sont les coefficients [en vertu de la formule (12)] du développement de $\frac{1}{1-\alpha}$; on a donc pour $x = 1$

$$X_0 = 1, \quad X_1 = 1, \ldots, \quad X_n = 1, \ldots;$$

de même, pour $x = -1$,

$$X_0 = 1, \quad X_1 = -1, \ldots, \quad X_n = (-1)^n,$$

pour $x = 0$, les X_n sont les coefficients du développement de $(1+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire

$$1, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1.3}{2.4}, \quad 0, \ldots.$$

La formule de Rodrigues met encore en évidence ce fait, que l'équation $X_n = 0$ a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 et $+1$.

IV. — *Digression sur les fonctions de Bessel.*

La formule de O. Rodrigues met en évidence une relation curieuse, qui existe entre les fonctions de Bessel et les fonctions X_n; d'où résulte un rapprochement entre l'équation (8) et l'équation de Riccati.

On a

$$X_n(x) = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n],$$

et, en appliquant la formule de Leibnitz pour la différentiation d'un produit,

$$X_n(x) = \frac{1}{2.4\ldots 2n}\Big[(x-1)^n 1.2.3\ldots n \\ + \frac{n^2}{1}(x-1)^{n-1}1.2.3\ldots n(x+1)\ldots\Big],$$

ou bien

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n}\Big\{(x-1)^n + \left(\frac{n}{1}\right)^2(x-1)^{n-1}(x+1) \\ + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2(x-1)^{n-2}(x+1)+\ldots\Big\},$$

et, par suite,

$$2^n\frac{X_n(x)}{(x-1)^n} = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\frac{x+1}{x-1} + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \ldots.$$

Si l'on fait alors

$$\frac{x+1}{x-1} = z \quad \text{ou} \quad x = \frac{z+1}{z-1},$$

on a

$$2^{n-1}X_n\left(\frac{z+1}{z-1}\right)(z-1) = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 z + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 z^2 + \ldots,$$

et, remplaçant z par $\frac{x^2}{n^2}$,

$$2^{n-1}X_n\left(\frac{x^2+n^2}{x^2-n^2}\right)\frac{x^2-n^2}{n^2} = 1 + \frac{z^2}{1^2} + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{x^4}{1^2.2^2} + \ldots,$$

et, pour $n = \infty$, on a

$$\lim 2^n \bar{X}_n \left(\frac{x^2 + n^2}{x^2 - n^2}\right) = 1 + \frac{x^2}{1^2} + \frac{x^4}{1^2 . 2^2} + \frac{x^6}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \ldots.$$

Le second membre de cette formule est une fonction de Bessel.

V. — *Sur un développement important.*

Désignons par Z_n ce que devient X_n pour $x = z$; la formule (9) donne

$$(2n+1) Z_n z = (n+1) Z_{n+1} + n Z_{n-1},$$
$$(2n+1) X_n x = (n+1) X_{n+1} + n X_{n-1}.$$

Multiplions la première formule par X_n, la seconde par Z_n et retranchons, nous aurons

$$\begin{aligned}&(2n+1) X_n Z_n (z - x)\\ &\quad = (n+1)(Z_{n+1} X_n - Z_n X_{n+1}) - n(Z_n X_{n-1} - X_n Z_{n-1});\end{aligned}$$

faisons successivement dans cette formule $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons les équations ainsi obtenues; nous aurons

$$[X_0 Z_0 + 3 X_1 Z_1 + \ldots + (2n+1) X_n Z_n](z - x) = (n+1)(Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n);$$

si donc on pose

$$(a) \qquad \Phi(x, z) = X_0 Z_0 + 3 X_1 Z_1 + \ldots + (2n+1) X_n Z_n,$$

on aura

$$(13) \qquad \Phi(x, z) = \frac{n+1}{z - x} (Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n).$$

Cette formule est, je crois, entièrement nouvelle. La formule (a) intégrée par rapport à z devient, en ayant égard aux formules (12),

$$\int_{-1}^{+1} \Phi_n(x, z)\, dz = 2,$$

et, par suite, la formule (13), intégrée aussi par rapport à z, donne

$$2 = (n+1)X_n \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1}}{z-x}\,dz - (n+1)X_{n+1}\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n}{z-x}\,dz;$$

d'où l'on tire la formule

$$(14) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n+1}}{z-x}\,dz = \frac{2}{(n+1)X_n} + \frac{X_{n+1}}{X_n}\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n\,dz}{z-x};$$

or on a

$$\int_{-1}^{+1}\frac{Z_0}{z-x}\,dz = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{z-x} = \log\frac{1-x}{1+x};$$

la formule (14) donne alors, pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{Z_1\,dz}{z-x} = \frac{2}{X_0} + \frac{X_1}{X_0}\log\frac{1-x}{1+x}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{Z_2\,dz}{z-x} = \frac{2}{2X_1} + \frac{X_2}{X_1}\int\frac{Z_1\,dz}{z-x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où l'on déduit

$$\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n\,dz}{z-x} = X_n\left(\log\frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{X_0X_1} + \frac{2}{2X_1X_2} + \ldots + \frac{2}{X_{n-1}X_n}\right),$$

ou encore

$$(15) \int_{-1}^{+1}\frac{Z_n\,dz}{z-x} = 2X_n\left(\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \cdots + \frac{1}{nX_{n-1}X_n}\right).$$

Il y a plusieurs conséquences à déduire de là : et d'abord, si l'on divise par X_n, en supposant X compris entre -1 et $+1$ et égal à $\cos\gamma$, on aura

$$\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n}{X_n}\frac{dz}{z-x} = 2\left(\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{X_0X_1} + \ldots\right);$$

Si alors on fait $n=\infty$, X_n ne tendra pas vers zéro en général, x devant être supérieur à 1 [sans quoi la série (1) serait convergente pour $x>1$ et $z=1$]; si l'on remplace alors Z_n par sa valeur approchée (7) et z par $\cos\gamma$, l'intégrale qui figure dans le premier membre tendra vers zéro, à cause des facteurs $\sin(n+\frac{1}{2})\gamma d\gamma$ et $\cos(n+\frac{1}{2})\gamma d\gamma$ qui sont à très-courte période, et l'on aura

$$\lim\left(\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{X_0X_1}+\frac{1}{2X_1X_2}+\ldots\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{X_0X_1}+\frac{1}{2X_1X_2}+\frac{1}{3X_2X_3}+\ldots,$$

et cette formule, démontrée par Gauss pour la première fois, a lieu pour toutes les valeurs de x supérieures en valeur absolue à l'unité. Il y a plus, on peut délimiter la région de convergence de cette série, ce qui n'avait pas encore été fait. Il résulte en effet de la démonstration qui a servi à l'établir qu'elle aura lieu si, z variant entre -1 et $+1$, $\frac{Z_n}{X_n}$ ne croît pas indéfiniment pour $n=\infty$, ce dont on sera assuré si X_n ne tend pas vers zéro ou si la série

$$X_0+X_1+X_2+\ldots+X_n+\ldots$$

est divergente; elle l'est, comme on l'a vu, quand x n'est pas réel ni compris entre -1 et $+1$.

Mais on peut tirer de la formule (15) des conséquences bien plus importantes. Admettons que $\frac{1}{a-x}$ soit développable comme il suit:

$$\frac{1}{a-x}=A_0X_0+A_1X_1+\ldots+A_nX_n+\ldots,$$

on aura, d'après ce que nous avons vu,

$$\frac{2}{a-x}=X_0\int_{-1}^{+1}\frac{Z_0}{a-z}dz+3X_1\int_{-1}^{+1}\frac{Z_1}{a-z}dz+5X_2\int_{-1}^{+1}\frac{Z_2}{a-x}dz\ldots.$$

La formule (4) fera connaître les différents termes du développement de

$\frac{1}{a-x}$, et l'on aura

$$\frac{1}{a-x} = X_0\left(\log\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) + 3X_1\left(\log\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \frac{1}{A_0 A_1}\right)$$
$$+ 5X_2\left(\log\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \frac{1}{A_0 A_1} - \frac{1}{2 A_1 A_2}\right) + \ldots,$$

A_0, A_1,... désignant les valeurs de X_0, X_1,... pour $x = a$.

VI. — *Étude de la fonction* Ξ_n.

Nous désignerons par Ξ_n la fonction définie par la relation

$$(16) \qquad \Xi_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n}{z-x}\, dz.$$

Nous avons vu comment, à l'aide de la formule (15), on peut exprimer Ξ_n au moyen de X_0, X_1,..., X_n; mais on peut en donner une autre expression qui établira un lien de plus entre cette fonction et la fonction X_n. Si, en effet, dans la formule (16), on remplace Z_n par $\frac{d^n (z^2-1)^n}{2.4\ldots 2n.dz^n}$, et si l'on intègre n fois de suite par partie, on trouve

$$(17) \qquad \Xi_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1} \frac{(z-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz;$$

mais, dans le paragraphe IV, nous avons observé que l'intégrale qui figure dans la formule (17), laquelle représente X_n quand elle est prise le long d'un contour fermé contenant le point x, satisfait à l'équation différentielle

$$(8) \qquad \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right] = n(n+1)y.$$

Cette équation, à laquelle satisfait X_n, a donc pour solution générale

$$y = CX_n + C'\Xi_n.$$

La formule (17) montre que Ξ_n peut aussi se représenter par la formule

$$(18) \qquad \Xi_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(x^2-1)^n}{z-x} dz.$$

Ξ_n, développé suivant les puissances descendantes de x, commence ainsi par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$; les coefficients sont d'ailleurs faciles à calculer. On remarquera aisément que la fraction $\frac{(z^2-1)^n}{z-x}$ peut se décomposer en un polynôme entier en z, de degré $2n-1$ en z et en x, et en une fraction de la forme $\frac{(x^2-1)^n}{z-x}$; la formule (18) prend alors la forme

$$\Xi_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{2} \left[F(x) + 2(x^2-1)^n \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right],$$

ce qui donne

$$\Xi_n = X_n \left[\log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + Q_n(x) \right],$$

$Q_n(x)$ désignant un polynôme entier en x de degré n en plus. Divisons par $z-x$ les deux membres de la formule

$$(2n+1) Z_n z = (n+1) Z_{n+1} + n Z_{n-1}$$

[déduite de (19)], et intégrons de -1 à $+1$. Nous aurons

$$(2n+1) \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n z}{z-x} dz = \frac{n+1}{2} \Xi_{n+1} + \frac{n}{2} \Xi_{n-1}.$$

Or

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n z}{z-x} dz = \int_{-1}^{+1} Z_n dz + \int_{-1}^{+1} \frac{x Z_n}{z-x} dz = \frac{x}{2} \Xi_n.$$

La formule précédente devient donc

$$(2n+1) \Xi_n x = (n+1) \Xi_{n+1} + n \Xi_{n-1}.$$

C'est précisément l'équation (9). Or la fonction que nous désignons dans ce paragraphe par Ξ_n satisfait à l'équation (9), à laquelle satisfaisait la fonction désignée par la même lettre dans le paragraphe II. Ces deux fonctions Ξ_n sont d'ailleurs égales pour $n=0$ et $n=1$; elles sont donc identiques, et l'on a

$$\Xi_n = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cosh\varphi)^{n+1}}.$$

Nous terminerons ce paragraphe en faisant connaître la fonction génératrice de Ξ_n. Il suffit, pour la trouver, d'observer que l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+\alpha^2}} = Z_0 + Z_1\alpha + Z_2\alpha^2 + \ldots.$$

Multiplions par $\frac{dz}{2(z-x)}$, et intégrons de -1 à $+1$. Nous aurons, tous calculs effectués,

$$(19) \quad \frac{1}{2\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} \log \frac{x-\alpha-\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{x-\alpha+\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \Xi_0 + \Xi_1\alpha + \Xi_2\alpha^2 + \ldots.$$

VII. — *Développement de la fonction* $\frac{1}{x-t}$.

Reprenons les formules (12) et (13). On en déduit

$$X_0Z_0 + 3X_1Z_1 + \ldots (2n+1)X_nZ_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n).$$

Divisons par $z-t$ et intégrons de $z=-1$ à $z=+1$; nous aurons

$$\sum_0^n \int_{-1}^{+1} (2n+1)X_n \frac{Z_n}{z-t}\,dz = \int_{-1}^{+1} \frac{(n+1)}{(z-x)(z-t)}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)\,dz.$$

Décomposant en fractions simples la fraction $\frac{1}{(z-x)(z-t)}$, il vient

$$\sum_0^n \int_{-1}^{+1} (2n+1) X_n \frac{Z_n}{z-t} dz = \frac{1}{x-t}\left[\int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-x} (Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n) dz \right.$$
$$\left. - \int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-t} (Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n) dz \right].$$

La première intégrale qui figure dans la formule (2) est égale, en vertu des formules (12), (13) et (10), à 2. On a donc

$$(20) \qquad \sum_0^n \int_{-1}^{+1} (2n+1) X_n \frac{Z_n}{z-t} = \frac{2}{x-t} + \frac{\Omega}{x-t},$$

en posant, pour abréger,

$$\Omega = \int_{-1}^{+1} \frac{n+1}{z-t} (Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n) dz.$$

Lorsque la quantité Ω tendra vers zéro pour $n = \infty$, la formule (20) se transformera dans la suivante :

$$(21) \qquad \frac{1}{x-t} = \Theta_0 X_0 + 3\Theta_1 X_1 + 5\Theta_2 X_2, \ldots,$$

Θ_i désignant en général la valeur de Ξ_i pour $x = t$; en sorte que

$$\Theta_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{X_i}{x-t} dx.$$

Toute la question se réduit donc à examiner dans quel cas Ω tend vers zéro. Or on a évidemment

$$\Omega = 2(n+1)(X_n \Theta_{n+1} - \Theta_n X_{n+1}),$$

ou, remplaçant X_n par sa valeur (8 *bis*) et Θ_n par sa valeur (10),

$$\Omega = \frac{2(n+1)}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi}{t + \sqrt{t^2-1}\cosh\psi}\right)^n \mathrm{A}\, d\varphi\, d\psi,$$

A désignant, pour abréger, une quantité finie et indépendante de n. Il est visible que Ω tendra vers zéro, et ne tendra vers zéro que si l'on a, pour toutes les valeurs de φ comprises entre zéro et π et de φ comprises entre zéro et ∞,

$$\text{mod.}\,\frac{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}{t+\sqrt{t^2-1}\cosh\psi}<1.$$

Si l'on fait

$$x=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right),\quad t=\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right),$$

cette formule devient

$$(a)\quad \text{mod.}\left[u+\frac{1}{u}+\left(u-\frac{1}{u}\right)\cos\varphi\right]<\text{mod.}\left[v+\frac{1}{v}+\left(v-\frac{1}{v}\right)\cosh\psi\right];$$

soit r le module, θ l'argument de u, le module du premier membre de cette formule a pour carré

$$\left(r+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{r}\right)^2\cos^2\varphi+2\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\varphi;$$

son maximum a lieu pour $\cos\varphi=1$, et alors il est égal à $2r^2$; le module maximum du premier membre de (a) est donc $r\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$ mod. u; le module minimum du second est $\sqrt{2}$ mod. v; la formule (a) prouve donc que l'on doit avoir

$$\text{mod.}\,u<\text{mod.}\,v.$$

Mais, quand u varie à l'intérieur d'un cercle de rayon r, x varie à l'intérieur d'une ellipse d'axes $\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $\left(r-\frac{1}{r}\right)$; quand v varie à l'extérieur d'un cercle de rayon r, t varie à l'extérieur d'une ellipse d'axes $\left(r+\frac{1}{r}\right)$ et $\left(r-\frac{1}{r}\right)$; il résulte de là que la formule (21) a lieu pour toutes les valeurs de x intérieures à une certaine ellipse et pour toutes les valeurs de t extérieures à la même ellipse; les foyers de cette ellipse sont les points ± 1.

Si l'on donne l'une des variables x ou t, le tracé de l'ellipse limitatrice sera très-simple; on sera ramené à construire cette courbe, connaissant les foyers et un point (l'affixe de la variable donnée).

VIII. — *Développement d'une fonction quelconque.*

Les fonctions de X_n présentent avec les cosinus des analogies frappantes : ainsi la formule de Fourier présente cette bizarrerie assez difficile à s'expliquer bien nettement, qu'elle est, pour les fonctions remplissant certaines conditions de continuité, convergente à l'intérieur ou à l'extérieur d'une ellipse, tandis qu'elle est toujours susceptible de représenter des fonctions, même discontinues, le long de l'axe des x. Les séries de X_n sont à ce point de vue comparables aux séries de Fourier.

Si, en effet, on considère la formule bien connue

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{z-x}dz = f(x),$$

elle donnera, quand il sera permis d'en faire usage,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)(X_0\zeta_0 + X_1\zeta_1 + \ldots)dz = f(x),$$

$\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ désignant ce que deviennent $\Xi_0, \Xi_1, \ldots$ pour $x = z$.

On en conclut la possibilité du développement de $f(x)$ en série de X_n pour les valeurs de x intérieures à une certaine ellipse, que l'on découvrira en cherchant, parmi toutes les ellipses ayant pour foyers les points ± 1, la plus petite de celles qui passent par un point singulier de $f(z)$.

On voit aussi que, si le développement est impossible en série de X_n, il pourra l'être en série de Ξ_n, à l'intérieur d'une couronne elliptique. Partons maintenant de la formule (13)

$$X_0 Z_0 + 3X_1 Z_1 + \ldots (2n+1)X_n Z_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n),$$

et, supposant x et z réels, multiplions par $f(z)\,dz$ et intégrons de -1

à $+1$, nous aurons

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{aligned} & X_0\int_{-1}^{+1} Z_0 f(z)dz + \ldots (2n+1)X_n\int_{-1}^{+1} Z_n f(z)dz \\ & = (n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{f(z)}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)dz. \end{aligned}\right.$$

Cherchons la limite de l'expression

$$W_n = (n+1)\int_{-1}^{+1}\frac{f(z)}{(z-x)}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n)dz,$$

pour $n=\infty$; à cet effet, remplaçons Z_n et X_n par leurs valeurs (7); nous aurons

$$\begin{aligned} W_n = (n+1)\int_{-1}^{+1} & \frac{f(z)\,dz}{z-x}\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\sin\gamma\sin\delta} \\ \times\Big\{ & \left[\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\gamma + \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\gamma\right]\left[\cos\left(n+\tfrac{3}{2}\right)\delta + \sin\left(n+\tfrac{3}{2}\right)\delta\right. \\ - & \left[\cos\left(n+\tfrac{3}{2}\right)\gamma + \sin\left(n+\tfrac{3}{2}\right)\gamma\right]\left[\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta + \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta\Big\},\right. \end{aligned}$$

$\cos\gamma$ et $\cos\delta$ représentant respectivement x et z. Les facteurs $(n+1)$ et $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ se détruisent aux limites; on voit de plus que c'est seulement pour $Z=x$ que l'intégrale W_n a une valeur appréciable, à cause des facteurs à courte période, tels que $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma$ et $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma$; cette circonstance permet de faire sortir $f(z)$ de dessous le signe $\int$ et de le remplacer par $f(x)$. Mais alors W_n devient le produit de $f(x)$ par ce que deviendrait cette même quantité W_n si $f(z)$ était égal à l'unité, mais dans ce cas $W_n = 2$; on a donc

$$W_\infty = 2f(x)$$

et par suite

$$(22)\quad f(x) = \frac{1}{2}X_0\int_{-1}^{+1} f(z\, Z_0 dz + \ldots \frac{2n+1}{2}X_n\int_{-1}^{+1} Z_n f(z)dz + \ldots.$$

Cette dernière démonstration, comme l'on voit, ne suppose pas que $f(z)$ soit continue de -1 à $+1$: elle suppose, comme dans la démonstration du théorème de Fourier, que $f(z)$ ne passe pas une infinité de maxima ou de minima. Si notre démonstration a été très-rapide, c'est que nous avons pensé inutile d'insister sur des détails bien connus du lecteur, qui a présent à l'esprit la démonstration rigoureuse du théorème de Fourier.

Nous avons supposé x compris entre -1 et $+1$; si x n'était pas compris dans ces limites, le second membre de la formule (22) ne serait plus égal à $f(x)$, mais bien à zéro, W_n ayant une valeur infiniment petite, à cause des facteurs finis et à courte période qu'il contient.

IX. — *Généralisation des fonctions* X_n.

La fonction X_n s'est présentée comme le terme général du développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, dérivée d'une racine de l'équation

$$z = x + \alpha\frac{x^2-1}{2}.$$

En général, si l'on considère l'équation

$$z = x + \alpha F(z), \tag{23}$$

$F(z)$ désignant le polynôme

$$F(z) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k), \tag{24}$$

on aura

$$z = x + \alpha F(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d}{dx}F^2(x) + \ldots$$

et

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \alpha\frac{dF}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2F^2}{dx^2} + \ldots;$$

$\frac{1}{n!}\frac{d^n F^n(x)}{dx^n}$ est donc le coefficient de α^n dans la dérivée d'une racine de l'équation (23); nous désignerons ce polynôme de degré $nk - n$ par $\Phi_n(x)$. Il est évident que, si $\psi(x)$ est un polynôme de degré inférieur à n, on aura

$$\int_{a_i}^{a_j} \Phi_n \psi(x)\, dx = 0,$$

et que l'équation $\Phi_n = 0$ aura toutes ses racines réelles et inégales si l'équation $F(z) = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles. Si a_i et a_{i+1} sont réels entre a_i et a_j, l'équation $\Phi_n = 0$ aura n racines réelles. De l'équation

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n F^n(x)}{dx^n}$$

on conclut

$$(25) \qquad \Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé contenant le point x. Il en résulte

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Phi_n}{dx} = \dfrac{n+1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+2}}\, dz, \\ \dfrac{d^2\Phi_n}{dx^2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int \frac{F^2(z)}{(z-x)^{n+3}}\, dz, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Or, si l'on pose

$$V = (z-a_1)^{n+1}(z-a_2)^{n+1}\ldots(z-a_k)^{n+1}(z-x)^{-(n+k)}$$

ou

$$V = F^{n+1}(z)(z-x)^{-(n+k)},$$

on a

$$\frac{dV}{dz} = (n+1)F^n(z)\frac{dF}{dz}(z-x)^{-(n+k)} + (n+k)(z-x)^{-(n+k+1)}F^{n+1}(z)$$

ou

$$\frac{dV}{dz} = F^n(z)(z-x)^{-(n+k+1)}\left[(n+1)\frac{dF}{dz}(z-x) + (n+k)F(z)\right].$$

Or, si l'on observe que

$$F(z) = F(x) + (z-x)\frac{dF}{dx} + \frac{(z-x)^2}{1.2}\frac{d^2F}{dx^2} + \ldots,$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dx} + (z-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{(z-x)^2}{1.2}\frac{d^3F}{dx^3} + \ldots,$$

on conclut de l'équation qui précède

$$(27) \qquad \frac{dV}{dz} = F^n(z)[(n+k)F(x)(z-x)^{-(n+k+1)} + \ldots].$$

Si l'on intègre alors le long d'un contour fermé, contenant le point x, on a, en vertu de (25) et (26),

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = F(x)\frac{d^k\Phi_n}{dx^k} &+ \frac{2n+k+1}{n+k-1}\frac{dF}{dx}\frac{d^{k-1}\Phi_n}{dx^{k-1}} + \ldots \\ &+ \frac{1}{n+k+p}\left[\frac{n+k}{1.2.3..\,p} + \frac{n+1}{1.2.3\ldots(p-1)}\right]\frac{d^pF}{dx^p}\frac{d^{k-p}\Phi_n}{dx^{k-p}} + \ldots : \end{aligned} \right.$$

telle est l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfait la fonction Φ_n. Il est clair que Φ_n n'est qu'une solution particulière; mais la méthode même qui nous a conduit à l'équation (28) permet d'en découvrir toutes les solutions; en effet, si, au lieu d'intégrer la formule (27) le long d'un contour fermé, on l'intègre entre les limites a_i et a_j, et que l'on pose

$$(29) \qquad \int_{a_i}^{a_j} \frac{F^n(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} = \Phi_n^{i,j}(x),$$

la fonction $\Phi_n^{i,j}$ satisfera encore à l'équation (28). Cette équation (28) admet donc comme solutions particulières les fonctions Φ_n et $\Phi_n^{1,2}$, $\Phi_n^{1,3}, \ldots, \Phi_n^{k-1,k}$, lesquelles se réduisent évidemment à k distinctes. Ainsi, en appelant $C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}$ des constantes, la solution générale de (28) sera

$$C_0 \frac{d^k F^n}{dx^n} + C_1 \int_{a_1}^{a_2} \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n+1}} dz + \ldots + C_{k-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{F^n(z)}{(z-x)^{n-1}} dz.$$

La fonction $\Phi_n^{i,j}$ est susceptible d'une autre expression; il suffit pour la trouver d'intégrer par parties la formule (29); on a alors

$$\Phi_n^{i,j}(x) = \int_{a_i}^{a_j} \frac{\Phi_n(z)\,dz}{z-x}.$$

N. B. — M. Berard, commissaire des poudres et salpêtres, avait observé, dès 1863, que le radical $\sqrt{1-2xz+z^2}$ était développable en série convergente à l'intérieur d'une ellipse.