JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALLÉGRET

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 241-262.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__241_0>

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre;

PAR M. ALLÉGRET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont.

CHAPITRE PREMIER.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES.

1. Soit

$$f(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n) = a \tag{1}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre, entre la fonction inconnue x, les n variables indépendantes x_1, $x_2,\ldots$, x_n, la constante arbitraire a et les dérivées partielles

$$y_1 = \frac{\partial x}{\partial x_1},\quad y_2 = \frac{\partial x}{\partial x_2},\ldots,\quad y_n = \frac{\partial x}{\partial x_n}. \tag{2}$$

Nous considérerons x, de même que y_1, $y_2,\ldots$, y_n, comme $n+1$ fonctions inconnues des n variables x_1, $x_2,\ldots$, x_n et de n nouvelles constantes arbitraires a_1, $a_2,\ldots$, a_n jointes à la première a, et nous nous proposerons de déterminer ces fonctions de telle sorte qu'elles satisfassent identiquement et à la fois aux équations (1) et (2).

La première fonction, x, sera ce que Lagrange a appelé une *solution complète* de l'équation fondamentale (1).

2. Différentions successivement (1) par rapport aux n variables x_1, $x_2,\ldots$, x_n, et en tenant compte de la condition connue

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_\mu} = \frac{\partial y_\mu}{\partial x_k}, \tag{3}$$

il viendra

$$
(4)\left\{\begin{array}{l}
f'(x_1)+f'(x)y_1+f'(y_1)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}=0,\\
f'(x_2)+f'(x)y_2+f'(y_1)\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n}=0,\\
\dotfill,\\
f'(x_{n-1})+f'(x)y_{n-1}+f'(y_1)\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n}=0,\\
f'(x_n)+f'(x)y_n+f'(y_1)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}+f'(y_2)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}+\ldots+f'(y_n)\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}=0.
\end{array}\right.
$$

Ainsi, chacune des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles où les autres fonctions n'entrent que sous forme finie.

3. Si donc on applique à chacune des équations (4) la méthode d'intégration ordinaire, on s'assurera, sans difficulté, que les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont déterminées par n intégrales du système unique de l'ordre $2n-1$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{f'(x_1)+y_1 f'(x)}=\frac{dy_2}{f'(x_2)+y_2 f'(x)}=\frac{dy_3}{f'(x_3)+y_3 f'(x)}=\ldots=\frac{dy_n}{f'(x_n)+y_n f'(x)}\\
&\qquad=\frac{-dx_1}{f'(y_1)}=\frac{-dx_2}{f'(y_2)}=\frac{-dx_3}{f'(y_3)}=\ldots=\frac{-dx_n}{f'(y_n)},
\end{aligned}
$$

où, de même que dans les équations (4), on suppose x remplacé partout par sa valeur tirée de (1).

4. On évitera cette dernière substitution si l'on ajoute aux précédents rapports le nouveau

$$
\frac{-dx}{y_1 f'(y_1)+y_2 f'(y_2)+\ldots+y_n f'(y_n)},
$$

et qu'on considère ensuite (1) comme une intégrale des équations différentielles ainsi complétées.

Faisons, pour abréger,

$$
(5)\qquad P=-[y_1 f'(y_1)+y_2 f'(y_2)+\ldots+y_n f'(y_n)]
$$

et le système différentiel à intégrer sera

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{P}\dfrac{dy_1}{dx}=f'(x_1)+y_1f'(x), \quad \mathrm{P}\dfrac{dy_2}{dx}=f'(x_2)+y_2f'(x),\ldots, \\ \qquad\qquad \mathrm{P}\dfrac{dy_n}{dx}=f'(x_n)+y_nf'(x), \\ \mathrm{P}\dfrac{dx_1}{dx}=-f'(y_1), \quad \mathrm{P}\dfrac{dx_2}{dx}=-f'(y_2),\ldots, \quad \mathrm{P}\dfrac{dx_n}{dx}=-f'(y_n), \end{cases}$$

L'équation (1) en sera une première intégrale, avec a pour constante arbitraire. Il résulte des recherches de Pfaff, continuées par Jacobi et Cauchy, que le problème proposé est toujours possible et dépend uniquement de l'intégration des équations (6), et nous prendrons là notre point de départ. (*Voir* le Mémoire allemand de Jacobi *Sur l'intégration des équations aux différences partielles*, *Journal de Crelle*, t. XVII, ou la traduction française, *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. III.)

5. Sans effectuer complétement cette intégration, nous supposerons maintenant qu'on puisse adjoindre à (1) n autres intégrales de (6), telles que

$$(7)\quad \begin{cases} a_1=f_1(x, x_1, x_2,\ldots, x_n; y_1, y_2,\ldots, y_n), \\ a_2=f_2(x, x_1, x_2,\ldots, x_n; y_1, y_2,\ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n=f_n(x, x_1, x_2,\ldots, x_n; y_1, y_2,\ldots, y_n). \end{cases}$$

Les équations (1) et (7) détermineront les $n+1$ fonctions $x, y_1, y_2,\ldots, y_n$; mais elles ne correspondront à une même solution complète que si les valeurs obtenues $y_1, y_2,\ldots, y_n$ satisfont aux équations (2) et, en outre, deux à deux, à la condition générale (3). Cette méthode d'intégration donne lieu à une discussion délicate qui est l'objet principal du beau Mémoire posthume de Jacobi : *Nova methodus æquationes differentiales partiales... integrandi* (*Journal de Crelle*, t. LX).

Nous allons essayer, par une autre voie, d'établir les points essentiels de cette théorie.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DU SYSTÈME AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES AU MOYEN D'UNE SOLUTION COMPLÈTE DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

6. Nous remarquerons d'abord que, si les équations (1) et (7) définissaient une même solution complète, les $n-1$ dernières intégrales de (6) s'en déduiraient immédiatement. Il suffirait, pour cela, d'écrire

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = \frac{\partial x}{\partial a_2} : \ldots : \frac{\partial x}{\partial a_n} :: b_1 : b_2 : \ldots : b_n, \tag{8}$$

en désignant par $b_1, b_2, \ldots, b_n$, n constantes arbitraires dont on n'a à considérer que les rapports, ce qui permet de donner à l'une de ces constantes une valeur particulière quelconque, par exemple l'unité.

7. Pour le prouver, nous écrirons ainsi les équations (8)

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = e^{6_1+\lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial a_2} = e^{6_2+\lambda}, \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial a_n} = e^{6_n+\lambda}, \tag{9}$$

en désignant par e la base des logarithmes népériens, par λ une fonction particulière et par $6_1, 6_2, \ldots, 6_n$ les logarithmes des constantes précédentes $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Ces dernières équations détermineront toutes les $n+1$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et λ en fonction de l'une d'elles que nous prendrons pour variable indépendante unique.

8. Nous éliminerons les nouvelles constantes, en différentiant logarithmiquement les équations (9), ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial y_1}{\partial a_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial a_1} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_1} dx_n = \frac{\partial x}{\partial a_1} d\lambda,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial a_2} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial a_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_2} dx_n = \frac{\partial x}{\partial a_2} d\lambda,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial a_n} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial a_n} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_n} dx_n = \frac{\partial x}{\partial a_n} d\lambda.
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

D'autre part, en différentiant l'identité (1) par rapport aux constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial a_1} f'(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial a_1} f'(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_1} f'(y_n) = -\frac{\partial x}{\partial a_1} f'(x), \\ \frac{\partial y_1}{\partial a_2} f'(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial a_2} f'(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_2} f'(y_n) = -\frac{\partial x}{\partial a_2} f'(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial y_1}{\partial a_n} f'(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial a_n} f'(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial a_n} f'(y_n) = -\frac{\partial x}{\partial a_n} f'(x). \end{array}\right.$$

Par la comparaison des équations linéaires (10) et (11), on trouve

$$(12)\qquad \frac{-dx_1}{f'(y_1)} = \frac{-dx_2}{f'(y_2)} = \frac{-dx_3}{f'(y_3)} = \ldots = \frac{-dx_n}{f'(y_n)} = \frac{d\lambda}{f'(x)}.$$

9. Si l'on différentie de nouveau (1) par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qu'on tienne compte des relations (3) ainsi que des valeurs de $f'(y_1), f'(y_2), \ldots, f'(y_n)$ tirées de (12), on obtiendra

$$\begin{aligned} f'(x_1) + y_1 f'(x) &= f'(x)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\lambda} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{d\lambda}\right) \\ &= f'(x)\frac{dy_1}{d\lambda}, \end{aligned}$$

et de même

$$f'(x_2) + y_2 f'(x) = f'(x)\frac{dy_2}{d\lambda}, \ldots, \quad f'(x_n) + y_n f'(x) = f'(x)\frac{dy_n}{d\lambda};$$

d'où il suit

$$(13)\quad \frac{dy_1}{f'(x_1) + y_1 f'(x)} = \frac{dy_2}{f'(x_2) + y_2 f'(x)} = \cdots = \frac{dy_n}{f'(x_n) + y_n f'(x)} = \frac{d\lambda}{f'(x)}.$$

Si donc on fait

$$(14)\qquad \lambda = -\int \frac{f'(x).dx}{y_1 f'(y_1) + y_2 f'(y_2) + \ldots + y_n f'(y_n)} = \int f'(x)\frac{dx}{\mathrm{P}},$$

les équations (6) seront vérifiées par (8) ou (9) qui en sont des intégrales, ainsi que nous voulions le démontrer. (*Voir* le Mémoire de Jacobi déjà cité, § 10.)

CHAPITRE TROISIÈME.

DES CONDITIONS AUXQUELLES SONT ASSUJETTIES LES INTÉGRALES QUI DÉFINISSENT UNE MÊME SOLUTION COMPLÈTE.

10. L'une quelconque f_k des intégrales (7), que nous supposons définir une solution complète, doit évidemment donner lieu à un système différentiel analogue à (6), savoir :

$$(15)\quad \begin{cases} P_k \dfrac{dy_1}{dx} = f'_k(x_1) + y_1 f'_k(x), \ldots, & P_k \dfrac{dy_n}{dx} = f'_k(x_n) + y_n f'_k(x), \\ P_k \dfrac{dx_1}{dx} = -f'_k(y_1), \ldots, & P_k \dfrac{dx_n}{dx} = -f'_k(y_n), \end{cases}$$

où l'on pose

$$(16)\qquad P_k = -(y_1 f'_k(y_1) + y_2 f'_k(y_2) + \ldots + y_n f'_k(y_n)),$$

et les équations (1) et (7) seront encore $(n+1)$ intégrales de ce nouveau système.

11. Différentions par rapport à x celle des équations (7) où entre la fonction $f_{k'}$ et remplaçons les dérivées des autres variables par leurs valeurs (15), il viendra, après la substitution (16) de P_k, l'identité

$$(17)\quad \begin{cases} f'_k(x_1) f'_{k'}(y_1) - f'_k(y_1) f'_{k'}(x_1) \\ \quad + f'_k(x_2) f'_{k'}(y_2) - f'_k(y_2) f'_{k'}(x_2) + \ldots \\ \quad + f'_k(x_n) f'_{k'}(y_n) - f'_k(y_n) f'_{k'}(x_n) \\ \quad + y_1 [f'_k(x) f'_{k'}(y_1) - f'_k(y_1) f'_{k'}(x)] \\ \quad + y_2 [f'_k(x) f'_{k'}(y_2) - f'_k(y_2) f'_{k'}(x)] + \ldots \\ \quad + y_n (f'_k x f'_{k'} y_n - f'_k y_n f'_{k'} x) = 0, \end{cases}$$

et cette identité est manifeste lorsque l'une des deux fonctions f_k ou $f_{k'}$ se confond avec f, et l'autre avec une intégrale de (6).

12. En omettant les n relations où entre la fonction f, les intégrales (7) combinées, deux à deux, fourniront $\frac{n(n-1)}{2}$ autres identités (17). Je dis, réciproquement, que si ces dernières existent entre n intégrales convenablement choisies (7), les relations (2) et (3) s'ensuivront nécessairement.

Pour le démontrer, différentions par rapport à $x_{k'}$ l'identité

$$f_i = a_i,$$

que nous supposerons appartenir aux groupes (7) et (1), et où nous remplacerons $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ par les valeurs qu'on en tire. Après avoir multiplié par $f'_{i'}(y_{k'})$ (i et i' désignant deux indices quelconques qui peuvent même être nuls), et ajouté membre à membre les équations obtenues en donnant successivement à k' ses diverses valeurs depuis 1 jusqu'à n, il viendra

$$\begin{aligned}
&\left[f'_i(x_1) + \frac{\partial x}{\partial x_1} f'_i(x)\right] f'_{i'}(y_1) \\
&\quad + \left[f'_i(x_2) + \frac{\partial x}{\partial x_2} f'_i(x)\right] f'_{i'}(y_2) + \ldots + \left[f'_i(x_n) + \frac{\partial x}{\partial x_n} f'_i(y_n)\right] f'_{i'}(y_n) \\
&\quad + f'_i(y_1)\left[\frac{\partial y_1}{\partial x_1} f'_{i'}(y_1) + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} f'_{i'}(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} f'_{i'}(y_n)\right] \\
&\quad + f'_i(y_2)\left[\frac{\partial y_2}{\partial x_1} f'_{i'}(y_1) + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} f'_{i'}(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} f'_{i'}(y_n)\right] \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + f'_i(y_n)\left[\frac{\partial y_n}{\partial x_1} f'_{i'}(y_1) + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} f'_{i'}(y_2) + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} f'_{i'}(y_n)\right] = 0.
\end{aligned}$$

13. Permutons ensuite, l'un dans l'autre, les indices i et i', et retranchons, membre à membre, les équations. On trouvera, en tenant compte des relations identiques (17) et après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}
&[f'_i(x) f'_{i'}(y_1) - f'_{i'}(y_1) f'_{i'}(x)]\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - y_1\right) \\
&\quad + [f'_i(x) f'_{i'}(y_2) - f'_i(y_2) f'_{i'}(x)]\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - y_2\right) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [f'_i(x) f'_{i'}(y_n) - f'_i(y_n) f'_{i'}(x)]\left(\frac{\partial x}{\partial x_n} - y_n\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k'=1}^{k'=n} [f'_i(y_k) f'_{i'}(y_{k'}) - f'_i(y_{k'}) f'_{i'}(y_k)]\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial y_{k'}}{\partial x_k}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on donne maintenant aux indices i et i' leurs diverses valeurs, on formera un nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ d'équations linéaires et homogènes par rapport aux binômes

$$\frac{\partial x}{\partial x_1}-y_1,\quad \frac{\partial x}{\partial x_2}-y_2,\ldots,\quad \frac{\partial x}{\partial x_n}-y_n,$$

et

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2}-\frac{\partial y_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial y_2}{\partial x_3}-\frac{\partial y_3}{\partial x_2},\ldots,\quad \frac{\partial y_k}{\partial x_{k'}}-\frac{\partial y_{k'}}{\partial x_k},$$

en nombre égal à celui des équations. Ces binômes sont donc nuls, et les conditions (2) et (3) seront remplies, en admettant que le déterminant des équations précédentes ne soit pas identiquement nul, ou ne devienne pas tel, comme conséquence de quelques-unes des équations (1) et (7), où les constantes auraient des valeurs données non arbitraires, ce qui ne peut avoir lieu que dans certains cas très-particuliers que nous excluons formellement. Les conditions (17) suffisent donc, en général, pour que le système formé par les équations (1) et (7) fournisse une solution complète x de l'équation proposée (1).

14. Nous ferons

$$(18)\quad [f_k, f_{k'}] = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_{k'}}{\partial y_i}-\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\frac{\partial f_{k'}}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{i=n} y_i\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{\partial f_{k'}}{\partial y_i}-\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\frac{\partial f_{k'}}{\partial x}\right).$$

Dans les applications à la dynamique, x n'entre pas dans les fonctions $f, f_1, \ldots, f_n$, et l'on a simplement

$$(19)\qquad [f_k, f_{k'}] = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_{k'}}{\partial y_i}-\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\frac{\partial f_{k'}}{\partial x_i}\right).$$

On voit, d'après ce qui précède, que, pour que le système des intégrales (7) corresponde à une solution complète de (1), il faut et il suffit que les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions

$$[f_k, f_{k'}] = 0$$

soient identiquement remplies pour toutes les combinaisons possibles, deux à deux, entre les indices différents k et k'.

CHAPITRE QUATRIÈME.

FORMATION DE NOUVELLES INTÉGRALES AU MOYEN DE DEUX PREMIÈRES.

15. Soient

$$(20) \qquad \begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1, \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_2 \end{cases}$$

deux intégrales quelconques de (6). Lorsque la condition $[f_1, f_2] = 0$ n'est pas identiquement satisfaite, les deux intégrales ne font pas partie du groupe *canonique* qui définit une même solution complète, mais il est très-remarquable que l'expression $[f_1, f_2]$ est identiquement constante, ou encore que, égalée à une constante arbitraire, elle donne nécessairement une intégrale de (6), de sorte que, si la nouvelle fonction n'est pas une combinaison particulière des fonctions f_1 et f_2, elle fournit une intégrale distincte des précédentes.

Cette troisième intégrale, combinée avec les premières, donnerait de même une quatrième intégrale, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement de toutes les intégrales de (6), qui se déduiraient, par ce calcul facile, des deux premières (20).

16. Cette curieuse propriété a été découverte par Jacobi, qui a ensuite reconnu qu'elle est une conséquence immédiate d'un théorème autrefois démontré par Poisson, dans un Mémoire *Sur la variation des arbitraires* (XV^e Cahier de l'École Polytechnique, p. 281). Ce dernier géomètre avait, en effet, formé, au moyen des intégrales des problèmes de Mécanique, certaines expressions, analogues aux précédentes et indépendantes du temps. En les égalant, selon la remarque de Jacobi, à une constante arbitraire, elles peuvent donc fournir de nouvelles intégrales, et la vérification du théorème n'offre d'autre difficulté que la longueur des calculs. Celui que nous venons d'énoncer ne diffère que par la forme de celui de Poisson et de Jacobi, ou, du moins, s'y rattache de très-près.

17. Pour le montrer, nous transformerons l'équation (1) en posant

$$z = xt, \tag{21}$$

et en désignant par t une nouvelle variable et par z une nouvelle fonction. Nous désignerons, de plus, par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les dérivées de z par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de sorte qu'on aura

$$x = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad y_1 = \frac{z_1}{t}, \quad y_2 = \frac{z_2}{t}, \ldots, \quad y_n = \frac{z_n}{t}. \tag{22}$$

L'équation (1) deviendra

$$f\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{z_1}{t}, \frac{z_2}{t}, \ldots, \frac{z_n}{t}\right) = a. \tag{23}$$

18. On déduit de (23), par la méthode précédente, le système aux différences ordinaires analogues à (6)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}, & \frac{dz_2}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{dz_n}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial x_n}, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial x}{\partial z_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\partial x}{\partial z_2}, \ldots, & \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{\partial x}{\partial z_n}, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

en donnant à x sa valeur tirée de (23). Cette dernière forme est appelée *canonique*.

19. Soient maintenant α et β deux intégrales du système simultané (24) où

$$\alpha = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n, t),$$
$$\beta = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n, t);$$

on aura, d'après le théorème de Poisson et de Jacobi, que nous venons de rappeler ci-dessus,

$$[\alpha, \beta] = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial z_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_i} = \text{const.}; \tag{25}$$

comme d'ailleurs, en désignant par (α) et (β) ce que deviennent les fonctions α et β, dans le système primitif des variables en $x, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z_2} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_2}, \ldots, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_n},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\beta)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z_2} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\beta)}{\partial y_2}, \ldots, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial(\beta)}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial(\alpha)}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial(\alpha)}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} = \frac{\partial(\alpha)}{\partial x_n} + y_n\frac{\partial(\alpha)}{\partial y_x},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_1} = \frac{\partial(\beta)}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial(\beta)}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = \frac{\partial(\beta)}{\partial x_n} + y_n\frac{\partial(\beta)}{\partial x}.$$

La substitution de ces valeurs dans (25) donnera ensuite

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{t}[(\alpha), (\beta)] = \text{const.}$$

Mais, puisque t n'entre ni dans (α) ni dans (β), l'expression $[(\alpha), (\beta)]$ est encore égale à une constante arbitraire ou fournit une intégrale de (6), de même que (α) et (β). Le théorème de Poisson rentre immédiatement, comme cas particulier, dans le nôtre, lorsqu'on suppose

$$f'(x) = 0, \quad f'_1(x) = 0, \ldots, \quad f'_n(x) = 0,$$

ou que la fonction inconnue x n'entre pas explicitement dans les intégrales considérées.

CHAPITRE CINQUIÈME

EXPOSÉ D'UNE NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

20. Après avoir établi les relations qui existent entre une solution complète de (1) et les intégrales du système (6), nous allons maintenant faire connaître le parti qu'on en peut tirer pour effectuer la première intégration, ou tout au moins pour en diminuer le plus possible la difficulté.

Supposons d'abord qu'on ait une première intégrale

$$(26)\qquad \varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1$$

des équations (6), différente de (1). Comme la condition

$$[f, \varphi] = 0$$

sera ici identiquement satisfaite, les équations (1) et (26) feront partie d'un système canonique correspondant à une même solution complète où entreront les constantes a et a_1. Nous tirerons de (1)

$$(27)\qquad y_1 = \psi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n, a)$$

et nous porterons cette valeur dans (26), qui deviendra

$$(28)\qquad f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_2, y_3, \ldots, y_n, a) = a_1,$$

et la fonction considérée x est encore une solution complète de cette dernière équation par rapport aux $n-1$ variables

$$x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

qui se déduit de la précédente en y considérant simplement a, a_1 et x_1 comme des constantes particulières, et $a_2, a_3, \ldots, a_n$ comme les constantes arbitraires de la nouvelle solution.

21. L'équation aux dérivées partielles (28) donnera un système de $2(n-1)$ équations correspondantes aux dérivées ordinaires, ayant pour intégrales celles du premier système (6), à l'exception de (1) qui a servi à l'élimination de y_1 et d'une intégrale dérivée de la solution x et où entreraient $\frac{\partial x}{\partial a_1}$ et la constante b_1 (*voir* n° **6**).

Ainsi, si l'on pose

$$(29)\qquad P_1 = -[y_2 f_1'(y_2) + y_3 f_1'(y_3) + \ldots + y_n f_1'(y_n)],$$

et qu'on établisse les équations différentielles

$$(30)\quad \begin{cases} P_1 \dfrac{dy_2}{dx} = f_1'(x_2) + y_2 f_1'(x), \ldots, & P_1 \dfrac{dy_n}{dx} = f_1'(x_n) + y_n f_1'(x), \\ P_1 \dfrac{dx_2}{dx} = -f_1'(y_2), & P_1 \dfrac{dx_n}{dx} = -f_1'(y_n), \end{cases}$$

les intégrales de ce second système seraient connues si toutes celles du premier (6) avaient été préalablement déterminées.

Mais, réciproquement aussi, on peut faire en sorte que toute intégrale (α) de (30), où la constante arbitraire (α) est une fonction quelconque de x_1, satisfasse en même temps au système (6), en ayant recours, au besoin, à l'intégration d'une équation auxiliaire du premier ordre entre α et $\frac{d\alpha}{dx_1}$. Nous admettrons expressément que toutes les intégrales du système (30) que nous aurons à considérer remplissent cette condition essentielle, et nous écarterons, comme inutiles, les autres. Les constantes arbitraires des intégrales employées devront donc pouvoir être assujetties à des équations linéaires aux dérivées partielles qui permettront de substituer ensuite à ces constantes des fonctions convenables. Soient $a_2, a_3, \ldots, a_n$ les $(n-1)$ nouvelles intégrales de (30) qui déterminent une même solution complète x de (28); on aura d'abord, puisque nos intégrales satisfont au système (6),

$$[a, a_k] = 0,$$

et, en outre, à cause des conditions dont nous venons de parler,

$$[a_1, a_2] = 0, \quad [a_1, a_n] = 0, \quad [a_2, a_3] = 0, \ldots.$$

Le problème de l'intégration sera ainsi ramené à celui de l'équation (28).

22. La réduction du système (6) à (30) peut encore être appliquée au dernier système, dont une nouvelle intégrale permettra, de même, de diminuer d'une unité le nombre des variables indépendantes de la solution complète et de deux unités l'ordre des équations différentielles. On formera ainsi, de proche en proche, des systèmes de plus en plus réduits dont les intégrales devront satisfaire à tous ceux qui précèdent, et les valeurs suivantes :

$$(31)\qquad \begin{cases} y_1 = \psi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_2, y_3, \ldots, y_n, a), \\ y_2 = \psi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_3, y_4, \ldots, y_n, a, a_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \psi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; a, a_1, \ldots, a_{n-1}), \end{cases}$$

déduites de n intégrales consécutives, correspondront aux dérivées partielles

$$(32)\qquad \begin{cases} f(x, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = a, \\ f_1(x, x_1, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_n, a) = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x, x_1, \ldots, x_n; y_n, a, a_1, \ldots, a_{n-2}) = a_{n-1}. \end{cases}$$

La dernière des équations (31) et (32) est une équation ordinaire du premier ordre qui donnera par une intégration finale

$$(33)\qquad x = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

ou la solution complète cherchée. Cette valeur, toutes les autres conditions étant supposées remplies, rendra identique les équations (31) et (32), et le théorème du n° **6** fera connaître les $(n-1)$ dernières intégrales de (6), dont (32) et (33) sont les $(n+1)$ premières.

23. Les calculs seraient beaucoup abrégés si l'on pouvait obtenir à la fois plusieurs intégrales *canoniques* du système (6), ou satisfaisant, deux à deux, à la condition (n° **14**)

$$[f_k, f_{k'}] = 0.$$

On éliminerait entre ces i intégrales et l'équation (1) les i variables $y_1, y_2, \ldots, y_i$, et l'on arriverait ainsi tout de suite à l'équation

$$(34)\quad f_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_n; a, a_1, \ldots, a_{i-1}) = a_i,$$

en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_i$ les constantes des i intégrales considérées.

24. Remarquons que toute combinaison des intégrales canoniques $f, f_1, \ldots, f_i$, dans laquelle entrent $i+1$ constantes arbitraires, fournit toujours une équation canonique lorsqu'on remplace une ou plusieurs des constantes par leurs valeurs en fonction des variables.

Soient, en effet, Φ_k et $\Phi_{k'}$ ce que deviennent deux intégrales quelconques φ_k et $\varphi_{k'}$, après cette substitution de quelques-unes des constantes $a, a_1, \ldots, a_i$ par leurs valeurs $f, f_1, \ldots, f_i$. On aura identiquement

$$\begin{aligned}[\Phi_k, \Phi_{k'}] = [\varphi_k, \varphi_{k'}] &+ [f, f_1]\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial a}\frac{\partial \varphi_{k'}}{\partial a_1} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_1}\frac{\partial \varphi_{k'}}{\partial a}\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [f_g, f_{g'}]\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial a_g}\frac{\partial \varphi_{k'}}{\partial a_{g'}} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial a_{g'}}\frac{\partial \varphi_{k'}}{\partial a_g}\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et, à cause des identités,

$$[f, f_1] = [f_g, f_{g'}] = \ldots = 0;$$

la formule précédente devient

$$[\Phi_k, \Phi_{k'}] = [\varphi_k, \varphi_{k'}]. \tag{35}$$

Ainsi l'on peut traiter, dans les intégrales, les constantes canoniques comme des constantes particulières, ou les remplacer, à volonté, par les fonctions connues dont elles expriment la valeur.

CHAPITRE SIXIÈME.

DU CAS OU LA FONCTION INCONNUE N'ENTRE DANS L'ÉQUATION A INTÉGRER QUE PAR SES DÉRIVÉES PARTIELLES.

25. Lorsque x n'entre pas explicitement dans (1), cette dernière sera alors

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = a. \tag{36}$$

Les équations (6) se simplifient beaucoup et deviennent

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy_2}{dx_1}=\frac{\partial y_1}{\partial x_2},\quad \frac{dy_3}{dx_1}=\frac{\partial y_1}{\partial x_3},\dots,\quad \frac{dy_n}{dx_1}=\frac{\partial y_1}{\partial x_n},\\ &\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\partial y_1}{\partial y_2},\quad \frac{dx_3}{dx_1}=-\frac{\partial y_1}{\partial y_3},\dots,\quad \frac{dx_n}{dx_1}=-\frac{\partial y_1}{\partial y_n},\end{aligned}\right.$$

en prenant pour y_1 la valeur tirée de (36) en fonction des $2n-1$ variables $x_1, x_2,\dots, x_n; y_1, y_2,\dots, y_n$.

La forme (37) est précisément celle des équations de la Dynamique, quand on leur applique la transformation d'Hamilton.

26. D'après ce qui a été dit dans le Chapitre précédent, il suffira de déterminer successivement $n-1$ intégrales de (37), en réduisant de deux unités, à chaque intégration, l'ordre du système différentiel, et n'introduisant que des intégrales satisfaisant aux systèmes réduits et à tous les précédents. La dernière intégrale sera

$$f_{n-1}(x_1, x_2,\dots, x_n, y_n;\ a, a_1, a_2,\dots, a_{n-2}) = a_{n-1}$$

ou, en résolvant par rapport à y_n,

$$y_n = \psi_n(x_1, x_2,\dots, x_n;\ a, a_1, a_2,\dots, a_{n-1}).$$

Cette équation du premier ordre, où $y_n = \frac{\partial x}{\partial x_n}$, est intégrable, et donnera x par la quadrature

$$x = a_n + \int \psi_n dx_n.$$

27. Si l'on fait abstraction d'une fonction déterminée des autres variables et constantes, on voit que la nouvelle constante a_n n'entre dans x que par voie d'addition. Les $n-1$ dernières intégrales de (37) deviendront ici (n° **6**)

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = b_1,\quad \frac{\partial x}{\partial a_2} = b_2,\dots,\quad \frac{\partial x}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1},$$

attendu qu'on a

$$\frac{\partial x}{\partial a_n} = 1.$$

28. En Dynamique, l'équation (36) prend ordinairement la forme

$$(38)\qquad \frac{\partial x}{\partial t} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial x_n}\right),$$

où le temps t n'entre pas dans le second membre. Pour ramener cette dernière à la précédente, il suffit de poser, en désignant par a une constante arbitraire,

$$(39)\qquad x = at + \xi,$$

et l'équation (38) devient identique à (36), en faisant

$$(40)\qquad \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = y_1, \ldots, \frac{\partial x}{\partial x_n} = \frac{\partial \xi}{\partial x_n} = y_n.$$

Cette équation (36) n'est autre que l'intégrale *des forces vives* dans le système différentiel de l'ordre $2n$ qui correspond à l'équation aux dérivées partielles (38), savoir :

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{dy_n}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial y_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial y_n}, \end{aligned}\right.$$

et par la substitution (39) le système (41) est ramené à (37) ou à l'ordre $2n-2$. L'intégrale conjuguée à a, $\left(\frac{\partial x}{\partial a} = b\right)$ ou à celle des forces vives deviendra

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = -(t - t_0),$$

en désignant par t_0 la constante arbitraire du temps.

29. Plus généralement encore, si l'on proposait d'intégrer l'équation

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ y_1, y_2, \ldots, y_k) = \psi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n;\ y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n),$$

dont (38) n'est qu'un cas particulier, on poserait

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, y_2, \ldots, y_k) = a,$$
$$\psi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n; y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n) = a,$$

et l'on intégrerait séparément ces deux équations aux dérivées partielles. La première donnerait une solution à $k-1$ constantes et la seconde une autre à $n-k-1$ constantes différentes. En ajoutant les deux solutions et en plus une nouvelle constante arbitraire, on obtiendra la solution complète de l'équation considérée.

30. Observons que la méthode d'intégration développée dans ces deux derniers Chapitres n'est qu'une généralisation de celle que Lagrange a exposée dans la *Théorie des fonctions analytiques* (première Partie, Chap. XVI, nos 92 et 93), pour le cas de deux variables indépendantes. Après avoir formé un système identique à (6), l'illustre géomètre ramène ensuite l'intégration au premier ordre par un procédé qui ne diffère pas, au fond, du nôtre, et demande une intégrale unique du système (6), ici réduit au troisième ordre. Lagrange s'est aussi beaucoup préoccupé du rôle des deux autres intégrales de ce dernier système, dont une paraît superflue. Il dit à ce sujet (XXe Leçon sur le *Calcul des fonctions*, édit. de 1806, p. 386) : « *Cette difficulté, je l'avoue, m'a longtemps tourmenté.* »

D'après ce qu'on a vu, il suffirait de déterminer alors deux intégrales f, f_1, par la condition d'identité

$$[f, f_1] = 0,$$

et la troisième s'en déduirait ensuite par de simples différentiations; mais ces liens si remarquables entre les intégrales de (6) ont été mis en évidence avec la plus grande généralité par Jacobi, qui, après avoir rapproché la belle découverte d'Hamilton en Dynamique des résultats obtenus précédemment par Lagrange et Pfaff, a fait faire ainsi des progrès considérables à cette partie du Calcul intégral.

CHAPITRE SEPTIÈME

DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE ET DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

31. Après avoir déterminé l'intégrale complète

$$x = F(x_1, x_2, \dots, x_n; a, a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{42}$$

de l'équation (1), si l'on remplace l'une des constantes arbitraires, a_n par exemple, par une fonction quelconque des autres,

$$a_n = \chi(a_1, a_2, \dots, a_n), \tag{43}$$

on pourra supposer ensuite que ces dernières $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ deviennent des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$, déterminées par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} F'(a_1) + \chi'(a_1)\,F'(a_n) = 0, \\ F'(a_2) + \chi'(a_2)\,F'(a_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F'(a_{n-1}) + \chi'(a_{n-1})\,F'(a_n) = 0. \end{array}\right. \tag{44}$$

32. Les dérivées partielles de x conserveront la même forme, et l'on aura, à cause des conditions (44),

$$\frac{\partial x}{\partial x_k} = F'(x_k). \tag{45}$$

La valeur de x, fournie par les substitutions précédentes, satisfera donc aux mêmes équations aux dérivées partielles que (42). Ce sera une solution de l'équation (1) avec une fonction arbitraire χ de $n-1$ quantités, ou ce que Lagrange a appelé une *solution générale* de cette équation.

33. Autrement encore, posons

$$(46)\qquad F'(a_1)=0,\quad F'(a_2)=0,\ldots,\quad F'(a_i)=0,$$

puis éliminons $a_1, a_2,\ldots, a_i$ entre ces dernières et (42), la nouvelle valeur de x ne renfermera plus que $n-i$ constantes arbitraires, et continuera à satisfaire à l'équation (1) et aux mêmes équations aux dérivées partielles que la solution complète précédente (42). Observons toutefois que, si l'on prend les n dérivées partielles de la première valeur de x (42), puis qu'on résolve les équations obtenues par rapport aux constantes arbitraires, on formera avec (42) un système canonique de $n+1$ équations satisfaisant, deux à deux, aux conditions

$$[a_k, a_{k'}]=0.$$

Il n'en est plus de même de la solution définie par l'ensemble des équations (42) et (46) et que j'appellerai, avec quelques auteurs, *singulière*. Elle correspond bien encore à $n+1$ équations aux dérivées partielles à $n-i$ constantes arbitraires, telles que

$$(47)\qquad a=f,\quad a_1=f_1,\ldots, a_{n-i}=f_{n-i}$$

et

$$(48)\qquad 0=f_{n-i+1},\quad 0=f_{n-i+2},\ldots,\ 0=f_n,$$

où les dernières, en nombre i, ne contiennent plus de constantes arbitraires; mais, quoique toutes ces équations soient des intégrales de (6), elles ne satisferont plus, en général, identiquement à la condition $[f_k, f_{k'}]=0$, et la théorie précédente est ici en défaut, comme il est facile de s'en assurer.

34. Par des combinaisons préalables faites entre les mêmes équations, on peut regarder, néanmoins, les premières (47) comme canoniques et remplissant, deux à deux, la condition $[f_k, f_{k'}]=0$, et les

i dernières (48) comme provenant de l'élimination de a_{n-i+1}, $a_{n-i+2}, \ldots,$ a_n, entre les i intégrales canoniques de (6)

$$(49) \qquad a_{n-i+1} = \varphi_{n-i+1}, \quad a_{n-i+2} = \varphi_{n-i+2}, \ldots, \quad a_n = \varphi_n,$$

et leurs conjuguées non canoniques (n° **6**)

$$(50) \qquad 0 = \frac{\partial x}{\partial a_{n-i+1}}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial a_{n-i+2}}, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial a_n},$$

d'où les autres constantes seraient éliminées au moyen des premières intégrales (47). De la sorte, les équations (48) remplaceront les $2i$ intégrales (49) et (50) du système (6), et la méthode du Chapitre V devient applicable aux $i+1$ équations aux dérivées partielles

$$a = f, \quad 0 = f_{n-i+1}, \quad 0 = f_{n-i+2}, \ldots, \quad 0 = f_n,$$

qui sont compatibles, bien que le caractère discriminant n'ait plus lieu entre ces équations prises deux à deux. Les expressions $[f_k, f_{k'}]$ appliquées aux équations (48) ne peuvent fournir cependant que des combinaisons des mêmes équations et sont, par suite, susceptibles de devenir identiquement nulles, après substitution de la solution singulière considérée. Si donc on suppose que les dernières équations (48) soient connues, et que, de plus, les conditions nécessaires dont nous venons de parler soient remplies, on éliminera entre (48) et (1), comme plus haut, les dérivées partielles $y_1, y_2, \ldots, y_i$, et l'on formera une équation unique aux variables $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$, dont l'intégration dépendra d'un système aux dérivées ordinaires d'ordre $2n - 2i$, ayant pour intégrales les $n - i + 1$ équations canoniques (47). Ces dernières seront communes à ce dernier système et au premier (6), conjointement avec les intégrales particulières (48). Par la méthode exposée dans ce Mémoire, les i intégrales non canoniques (48) pourront ainsi servir, en général, à abaisser l'ordre du système (6) de $2i$ unités, et la détermination de la solution singulière correspondante ne demandera, au plus, que des intégrations auxiliaires d'ordre i (n^{os} **21** et **22**), comme dans le cas des solutions complètes, lorsqu'on donne i premières intégrales canoniques. En différentiant ensuite par rapport aux constantes la solution singulière obtenue, on formera, par le procédé du Chapitre II, de nouvelles intégrales restreintes de (6) au nombre de $n-i+1$. Enfin la même solution à $n-i$ constantes arbitraires fournirait, comme au n° **31**, d'autres intégrales de l'équation (1) où entrerait une fonction arbitraire de $n-i-1$ quantités.