

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

**Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus
à balles après l'explosion**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 1 (1875), p. 121-140.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__121_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus à balles
après l'explosion;*

PAR M. H. RESAL.

Immédiatement après l'explosion d'un obus à balles, les fragments de l'enveloppe et les balles prennent certaines vitesses que l'on ne peut guère apprécier, et sur la grandeur et la direction desquelles on ne peut faire que des conjectures plus ou moins plausibles, jusqu'au moment où l'expérience sera venue nous éclairer sur quelques points principaux.

Les seuls principes de la Mécanique auxquels on puisse faire appel dans la question, savoir le principe du mouvement du centre de gravité et celui des moments par rapport à la tangente à la trajectoire au point où se trouve le projectile à l'instant où l'explosion a lieu, ne conduisent à aucune conséquence utile : aussi n'ai-je pas eu à les faire intervenir dans ce qui suit.

Avant d'aborder la question, je crois devoir développer quelques considérations générales qui, à mon point de vue, ne sont pas sans importance.

I. — DU POIDS DE POUDRE STRICTEMENT NÉCESSAIRE POUR BRISER UN PROJECTILE CREUX QUI NE RENFERMERAIT PAS DE BALLES. — DE L'EXPLOSION.

Soient

$\alpha = 0,00366$ le coefficient de dilatation des gaz (REGNAULT);

$\delta = 860^{\text{kg}}$ la densité gravimétrique de la poudre rapportée au mètre cube (PIOBERT);

$A = 425^{\text{kg}}$ l'équivalent mécanique de la chaleur ;
 $\gamma = 620$ calories la quantité de chaleur développée par
 1 kilogramme de poudre (composition théorique)
 brûlant sous son propre volume ;
 $c' = 0,18547$ la chaleur spécifique des gaz produits ;
 $T = 3340^{\circ}$ la température développée ;
 $P = 4374^{\text{atm}} \cdot 10330^{\text{kg}} = 45183420^{\text{kg}}$ la pression résultante.

SCHISKOFF
 et
 BUNSEN (*).

On déduit de là les valeurs numériques suivantes, qui nous seront utiles plus loin :

$$\frac{c'}{\alpha} = 51, \quad \frac{2c'\delta}{\alpha} = 87720, \quad 1 + \alpha T = 13,$$

$$\frac{2c'\delta}{\alpha} (1 + \alpha T) = 1133090, \quad \frac{2c'\delta}{\alpha} \left(\frac{1 + \alpha T}{P} \right) = 0,0250.$$

Cas d'un projectile sphérique.

Soient

R le rayon moyen de l'enveloppe ;
 e son épaisseur, que nous supposons assez petite pour que l'on puisse négliger le carré de $\frac{e}{R}$ devant l'unité ;
 V_0 son volume intérieur ;
 E, I le coefficient d'élasticité de la matière et sa résistance à la rupture par mètre carré ;
 p_0 la pression extérieure ;
 p la pression intérieure développée avant la rupture du projectile par la combustion d'un poids q de poudre ;
 t la température des gaz produits ;
 $\lambda, N = E\lambda$ la dilatation linéaire et la tension élastique par mètre carré, dues à la pression p .

[*] D'après les mêmes physiciens, les produits gazeux de la combustion ne forment que 0,314 du poids total.

Le volume primitif V_0 étant devenu $V_0(1+3\lambda)$, le travail développé par la pression variable est $3V_0 \int (p - p_0) d\lambda$, et l'on a, d'après les principes de la Thermodynamique,

$$q\gamma = qc't + \frac{3V_0}{A} \int (p - p_0) d\lambda.$$

Mais on sait que

$$(1) \quad N = E\lambda = \frac{(p - p_0)R}{2e},$$

d'où

$$p - p_0 = \frac{2Ee\lambda}{R} = \frac{2eN}{R}.$$

En portant cette valeur dans la formule précédente, on trouve

$$q\gamma = qc't + \frac{3V_0}{A} \frac{Ee}{R} \frac{\lambda^2}{2} = qc't + \frac{3V_0 e N^2}{ARE}$$

et

$$(2) \quad q\left(\gamma + \frac{c'}{\alpha}\right) = q \frac{c'}{\alpha} (1 + \alpha t) + \frac{3V_0 e N^2}{ARE}.$$

Or on a, d'après la loi de Gay-Lussac,

$$\frac{V_0(1+3\lambda)p}{1+\alpha t} = \frac{q}{\delta} \frac{p}{1+\alpha T},$$

d'où

$$q(1+\alpha t) = \delta \cdot V_0(1+3\lambda)(1+\alpha T) \frac{p}{P} = \frac{\delta \cdot V_0(1+3\lambda)}{P} (1+\alpha T) \left(\frac{2eN}{R} + p_0 \right).$$

Mais, comme 3λ est toujours une très-petite fraction, on peut écrire tout simplement

$$(3) \quad q(1+\alpha t) = \frac{\delta \cdot V_0(1+\alpha T)}{P} \left(\frac{2eN}{R} + p_0 \right).$$

L'équation (2) donne par suite

$$q = \frac{V_0}{\gamma + \frac{c'}{\alpha}} \left[\frac{3eN^2}{ARE} + \frac{2e'\delta(1+\alpha T)}{\alpha P} \left(\frac{2eN}{R} + p_0 \right) \right],$$

et en introduisant les valeurs numériques données plus haut et négli-

geant la pression atmosphérique, qui est relativement petite,

$$(4) \quad q = \frac{V_0 N}{671} \left[\frac{c}{R} \left(\frac{3N}{425E} + 0,025 \right) \right].$$

Supposons que le projectile soit en fonte, on a

$$\Gamma = 14.10^6 \quad \text{et} \quad E = 10^9,$$

par suite

$$\frac{3N}{425E} = 0,0001,$$

et, lorsque $N = \Gamma$ ou lorsque la rupture est imminente,

$$(5) \quad q = 522 V_0 \frac{c}{R}.$$

Si maintenant on veut évaluer les poids en *grammes* et les volumes en centimètres cubes, il faut remplacer q par $\frac{q}{1000}$, V_0 par $\frac{V_0}{10^3}$, ce qui donne

$$(A) \quad q^{gr} = 0,522 \frac{c}{R} V_0^{cc}.$$

Cas d'un projectile cylindrique.

Une enveloppe cylindrique offrant une résistance moitié moindre qu'une enveloppe sphérique de même diamètre et de même épaisseur, il faut diviser l'expression précédente par 2, ce qui donne

$$(B) \quad q^{gr} = 0,261 \frac{c}{R} V_0.$$

Application à l'obus à balles de 12 (modèle de 1866). — On a

$$\frac{c}{R} = \frac{14}{52}, \quad V_0 = 768,$$

d'où

$$q = 54^{gr},$$

tandis que la charge est de 200 grammes, ce que l'on explique par la présence des balles, comme on le verra ci-après.

Il faut donc multiplier la valeur (B) par un certain coefficient déduit de la comparaison avec l'expérience.

Si nous prenons

$$(C) \quad q = \frac{e}{R} V_0,$$

on trouve, dans le cas actuel,

$$q = 206^{\text{gr}},$$

ce qui est d'accord avec la réalité.

Obus à balles de 4 (modèle de 1864). — On a

$$\frac{e}{R} = \frac{10}{37}, \quad V_0 = 331,$$

d'où, en vertu de la formule (C),

$$q = 89^{\text{gr}};$$

en pratique, on prend $q = 85^{\text{gr}}$.

Il y a donc tout lieu d'admettre, jusqu'à preuve du contraire, que la formule (C), qui est extrêmement simple, a un caractère pratique.

La quantité de chaleur transformée en travail, pour détruire l'enveloppe, est négligeable.

Cette quantité de chaleur correspond, en effet, au terme

$$\frac{3N}{425E} = 0,0001,$$

dont nous avons tenu compte, mais qui est négligeable devant le terme principal 0,025; de sorte que la désagrégation de l'enveloppe n'ab-

sorbe que $\frac{1}{252}$ de la chaleur dégagée par la combustion de la poudre, et il est clair que, dans les appréciations du genre de celles auxquelles nous nous livrons, on peut négliger une pareille fraction devant l'unité.

Du travail qui devrait être produit pour anéantir la quantité de chaleur développée par la combustion de la poudre.

Ce travail a pour valeur

$$q \times 0,62 \times 425 = 264q^{\text{kgm}},$$

soit pour $q = 200$, c'est-à-dire pour la charge d'un obus de 12,

$$q = 52800^{\text{kgm}} = 704^{\text{chx}}.$$

La masse totale du projectile chargé étant $\frac{11^{\text{kg}}, 79}{9,809} = 1,2$, si les gaz se détendaient spontanément, la vitesse moyenne w , communiquée à leurs molécules et aux éléments solides, serait donnée par

$$0,60 w^2 = 52800,$$

d'où

$$w = 296^{\text{m}},$$

ce qui est énorme. Il faut donc conclure de là que les gaz emportent avec eux, à l'état sensible, une grande partie de leur chaleur totale et qu'ils sont en même temps animés de très-grandes vitesses par rapport à celles des éléments solides; mais, toutefois, il y a lieu de conjecturer que ces dernières ne sont pas négligeables.

De l'explosion.

Lorsque la poudre s'enflamme, il se développe une pression graduelle qui atteint son maximum à l'instant où l'enveloppe éclate; mais

la durée du phénomène est tellement petite que l'on peut, sans erreur sensible, supposer, comme dans la théorie des chocs, que les éléments matériels m de la partie solide du corps n'ont pas changé de position pendant ce temps, quoique leurs vitesses aient pu éprouver des modifications importantes.

La masse m possédera, après l'explosion, la même vitesse qu'auparavant et, de plus, une certaine vitesse due à l'action des gaz produits, qui doit varier avec la distance de ce point à l'axe de figure et qui pourra être différente, toutes choses égales d'ailleurs, en passant d'un calibre à un autre.

Quoique le temps écoulé entre l'inflammation de la poudre et l'explosion soit très-court, cette période présente différentes phases qu'il est utile d'étudier.

Le soufre qui relie la moitié de la masse des balles, étant en contact avec la poudre, doit d'abord se briser, puis se fondre; l'enveloppe se dilate graduellement avant de se rompre; les balles prennent ainsi un peu de jeu; mais, malgré cela, les gaz éprouvent des résistances notables en traversant les interstices, de sorte qu'à chaque instant la pression est à son maximum dans l'ogive, qui est la partie la plus résistante de l'enveloppe, et va en diminuant avec la distance au culot; c'est ainsi que l'on peut expliquer pourquoi il faut employer plus de poudre pour briser cette enveloppe que celle qui serait nécessaire dans le cas où elle ne renfermerait pas de balles.

Lorsque l'enveloppe se rompt, les gaz contenus dans l'ogive se détendent très-rapidement, en même temps que d'autres se produisent si toute la poudre n'est pas brûlée. La vitesse des éclats de la partie antérieure, estimée parallèlement au plan de tir, éprouve par suite une augmentation, à l'inverse de ce qui a lieu pour les éclats postérieurs et les balles; en d'autres termes, les premiers éclats sont des projectiles par rapport au reste de l'obus, dont l'ensemble éprouve une sorte de mouvement de recul.

Mais en même temps les gaz confinés entre les balles s'écoulent à l'extérieur et déterminent, suivant les rayons, des vitesses qui ont bientôt atteint leur maximum. Ces vitesses *radiales* étant nulles sur l'axe, on

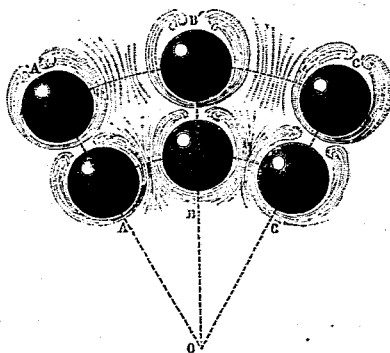
peut, sans erreur sensible, supposer qu'elles sont proportionnelles aux rayons [*].

Appréciation de l'ordre de grandeur de la vitesse radiale.

La seule donnée que nous ayons sur l'importance de la dispersion latérale consiste dans l'estimation à 20 degrés environ de l'ouverture du cône de projection, de sorte que la vitesse radiale aR (a étant une constante), correspondant au rayon moyen R de la partie cylindrique du projectile, serait environ $\frac{1}{6}$ de la vitesse restante V .

[*] Supposons qu'une tranche de balles perpendiculaire à l'axe du projectile ne soit nullement influencée dans le sens longitudinal. Soient A, B, C trois balles, dont les

FIG. 1.



centres soient situés sur un même cercle; A', B', C' les balles qui les suivent immédiatement sur les mêmes rayons.

D'après l'observation, le vent doit avoir une vitesse plus considérable que celle des balles adjacentes. Il se produit donc en avant de B un remous, par suite une réduction sur la pression d'arrière, d'où une accélération dans le mouvement de cette balle. Comme, dans le moment très-court où la détente des gaz produit les effets les plus importants, la plus forte chute de pression a lieu en avant, il s'ensuit que ce sont les balles extérieures qui acquièrent les plus grandes vitesses radiales, puis celles qui les précèdent immédiatement, ainsi de suite jusqu'à l'axe où il ne se produit aucun effet, ce qui est conforme à ce que nous avons avancé plus haut.

Il s'agit de voir si l'on a quelque raison pour considérer cette règle, sinon comme exacte, du moins comme un à peu près.

La vitesse initiale V_0 pouvant, sans grande erreur, être regardée comme proportionnelle à la racine carrée de la charge relative c , on peut poser

$$(a) \quad V = K\sqrt{c},$$

K étant un coefficient, qui diminue à mesure que le point d'explosion s'éloigne de la bouche à feu; mais, comme ce point ne peut occuper que quelques positions déterminées sur un arc assez limité de la trajectoire, K peut être considéré comme constant et égal à sa valeur correspondant à la position moyenne.

Ainsi, pour un obus de 4, on a, à la distance minimum de 500 mètres,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{284}{325} = 0,87;$$

à la distance maximum de 1200 mètres,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{237}{325} = 0,73;$$

en prenant la moyenne

$$(b) \quad \frac{V}{V_0} = 0,80;$$

l'erreur relative commise est inférieure à $\frac{1}{10}$.

Nous pouvons, dans cet aperçu, admettre, dans certaines limites, que les projectiles chargés ont des masses semblables, de sorte qu'en appelant Q le poids de l'un d'eux, son moment d'inertie est proportionnel à QR^2 . La demi-force vive radiale $\frac{1}{2} \sum ma^2 r^2 = \frac{a^2}{2} \sum mr^2$ sera donc proportionnelle à QR^2 ; mais elle serait proportionnelle à la charge q du projectile, si cette charge était totalement utilisée à la produire. On peut donc admettre qu'il en est encore, dans la réalité, de même en affectant q d'un facteur inférieur à l'unité. En appelant

$c' = \frac{q}{Q}$ la charge relative du projectile, aR est donc de la forme

$$(c) \quad aR = K' \sqrt{c'},$$

d'où, en posant $h = \frac{K'}{K}$,

$$(d) \quad \frac{aR}{V} = \frac{K'}{K} \sqrt{\frac{c'}{c}} = h \sqrt{\frac{c'}{c}},$$

ce qui exprime que le rapport de la vitesse radiale maximum à la vitesse restante est proportionnel à la racine carrée du rapport des charges du projectile et de la bouche à feu.

On a, pour l'obus de 12,

$$c' = \frac{200}{11790} = 0,0170, \quad c = \frac{1}{11790} = 0,0848, \quad \sqrt{\frac{c'}{c}} = 2,2;$$

pour l'obus de 4,

$$c' = \frac{85}{4718} = 0,0180, \quad c = \frac{55}{4718} = 0,1166, \quad \sqrt{\frac{c'}{c}} = 2,5.$$

Le rapport $\frac{aR}{V}$ est donc sensiblement le même pour ces deux calibres, ce qui paraît justifier la règle ci-dessus énoncée, représentée par la formule

$$(E) \quad \frac{aR}{V} = \frac{1}{6},$$

d'où, en vertu de l'équation (b), établie pour les pièces de 4,

$$(E') \quad aR = \frac{V_0}{8},$$

à peu de chose près.

Soient Ω la vitesse angulaire de rotation; i l'inclinaison de l'hélice sur l'axe de la pièce : on a

$$\Omega R = V_0 \tan i.$$

Pour les obus de 12,

$$i = 7^{\circ}35', \quad \Omega R = 0,115V_0;$$

pour les obus de 4,

$$i = 7^{\circ}15', \quad \Omega R = 0,110V_0.$$

On ne commettra pas une grande erreur en posant pour les deux calibres

$$(G) \quad \Omega R = \frac{V_0}{9}.$$

Il résulte de ce qui précède que *les vitesses radiales et gyrotoires maxima sont du même ordre de grandeur*; il importe donc de les faire intervenir simultanément dans nos recherches sur la dispersion.

Pour faire cesser toute incertitude sur la valeur de la vitesse radiale a , rapportée à l'unité de distance de l'axe, il paraîtrait utile de faire quelques séries d'expériences dans les conditions ci-après :

Un obus à balles serait attaché par son sommet au milieu d'une corde fixée à la même hauteur à ses deux extrémités (pour laisser toute liberté à l'action de la poudre sur la propulsion et le recul).

La hauteur du projectile serait portée de 5 mètres au-dessus du niveau du sol, mais dans l'axe d'un puits de 5 mètres de profondeur. Au fond de ce puits serait établi un plancher badigeonné à la chaux, et sur lequel on tracerait deux séries de lignes noires rectangulaires espacées de 0^m,20.

Au niveau du sol, sur l'ouverture du puits, on placerait un écran formé d'un châssis sur lequel on tendrait à la partie inférieure du papier où l'on reproduirait le système de lignes du plancher et en faisant coïncider, en projection horizontale, les deux systèmes. A la partie supérieure, on tendrait du calicot pour amoindrir l'effet du vent sur le papier, en vue de l'empêcher de se briser avant le passage du projectile.

Quelques expériences préliminaires permettraient de déterminer les dimensions transversales du puits (un diamètre de 5 à 6 mètres serait probablement suffisant).

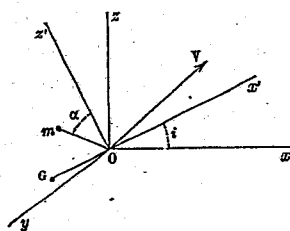
En faisant le relevé du périmètre des empreintes des balles sur le plancher et du trou dans le papier, à la suite de l'explosion, on aurait tous les éléments voulus pour déterminer la vitesse radiale.

II. — DE L'INFLUENCE DE LA ROTATION DU PROJECTILE SUR LA DISPERSION.

Mise en équation.

Nous avons fait remarquer plus haut que la position des éléments matériels du projectile ne varie pas sensiblement dans le temps très-court qui sépare le moment où l'enveloppe se brise de celui où les vitesses introduites par la détente des gaz ont atteint leur maximum, ce qui caractérise la fin de l'explosion.

FIG. 2.



Soient (*fig. 2*), à ce dernier instant,

Ox' la position de l'axe de figure du projectile;

Oz la verticale d'un point quelconque O de Ox' ;

Ox l'horizontale du même point comprise dans le plan zOx' ;

Oy la perpendiculaire en O au plan ci-dessus;

Oz' la perpendiculaire dans le même plan à Ox' ;

i l'inclinaison de Ox' sur Ox ;

G le centre de gravité du projectile;

V sa vitesse, que l'on peut supposer comprise dans le plan xOz , en négligeant ainsi sa composante parallèle à Oy , relativement très-petite, et qui donne lieu à la dérivation ;

γ l'angle connu, peu différent de i , qu'elle forme avec Ox ;

Ω la rotation qui a lieu autour de Ox' , de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant Ox' en ayant les pieds en O ;

m le centre de gravité d'un éclat ou d'une balle, par lequel nous ferons passer le plan zOy , et où nous supposerons concentrée la masse correspondante ;

r la distance Om ;

α l'angle mOz .

On peut négliger la vitesse due à la rotation autour de la parallèle à Oy menée au point G , et qui a produit le petit angle $VOx' = \gamma - i$.

La composante de la vitesse de m , dans le plan zOx , produite par l'explosion, étant très-petite par rapport à V , peut être négligée. L'autre composante, dirigée suivant Om d'après ce que l'on a vu plus haut, est de la forme μr , μ étant une constante.

La vitesse V donne les composantes

$$V \cos \gamma \quad \text{suivant } Ox,$$

$$V \sin \gamma \quad \text{suivant } Oz.$$

La vitesse radiale μr donne de même les composantes

$$\mu r \sin \alpha \quad \text{suivant } Oy,$$

$$\mu z \cos \alpha \quad \text{suivant } Oz',$$

$$- \mu r \cos \alpha \sin i \quad \text{suivant } Ox,$$

$$\mu r \cos \alpha \cos i \quad \text{suivant } Oz.$$

La rotation Ω se décompose en deux autres, $\Omega \cos i$ suivant Ox , $\Omega \sin i$ suivant Oz , qui donnent lieu aux vitesses

$$\Omega r \sin i \sin \alpha \quad \text{suivant } Ox,$$

$$\Omega r \cos i \cos \alpha \quad \text{suivant } Oy,$$

$$- \Omega r \cos i \sin \alpha \quad \text{suivant } Oz.$$

Si donc on pose

$$(1) \quad \begin{cases} \Omega \sin i = \omega', & V \sin \gamma = U', & a = \mu \cos i, \\ \Omega \cos i = \omega, & V \cos \gamma = U, & a' = \mu \sin i, \end{cases}$$

les composantes de la vitesse V de m après l'explosion suivant Ox , Oy , Oz sont

$$\begin{aligned} v_x &= U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r, \\ v_y &= (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r, \\ v_z &= U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r. \end{aligned}$$

En faisant abstraction de la résistance de l'air, les équations du mouvement de m , au bout du temps t après l'explosion, sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r, \\ \frac{dy}{dt} &= (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r, \\ \frac{dz}{dt} &= U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r - gt; \end{aligned}$$

et enfin, en négligeant les petites distances de m aux plans yOx , zOx , par rapport à celles que nous avons à considérer dans ce qui suit, nous avons

$$(2) \quad \begin{cases} x = [U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r] t, \\ y = (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r t, \\ z = [U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r] t - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

d'où l'on déduit pour les équations de la trajectoire parabolique en

projection sur les plans zOy , zOx ,

$$(3) \quad z = \frac{U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r}{(a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r} y - \frac{g}{2} \frac{y^2}{(a \sin \alpha + \omega \cos \alpha)^2 r^2}.$$

$$(4) \quad z = \frac{U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r}{U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r} x + \frac{g}{2} \frac{x^2}{[U + (\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r]^2}.$$

Supposons que le projectile se trouve à l'instant où l'explosion a lieu à une distance h au-dessus du niveau du sol; la position du point où la masse m tombera sera déterminée par les valeurs de x et y , résultant de l'hypothèse de $z = -h$ dans les équations précédentes, ce qui donne, en négligeant le terme $(\omega' \sin \alpha - a' \cos \alpha) r = (\Omega \sin \alpha - \mu \cos \alpha) r \sin i$, qui est très-petit, en raison de la faible valeur de i par rapport à $U = V \cos \gamma$ qui diffère peu de V ,

$$(5) \quad -h = \frac{U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r}{(a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) r} y - \frac{g}{2} \frac{y^2}{(a \sin \alpha + \omega \cos \alpha)^2 r^2},$$

$$(5') \quad -h = \frac{U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha)}{U} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{U^2}.$$

Dispersion latérale.

L'équation (5) donne

$$(6) \quad \begin{cases} g \frac{y}{r} = (a \sin \alpha + \omega \cos \alpha) \left\{ U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r \right. \\ \left. + \sqrt{[U' + (a \cos \alpha - \omega \sin \alpha) r]^2 + 2gh} \right\}. \end{cases}$$

Nous avons pris le signe $+$ pour le radical, parce que la racine doit être telle que, pour $h = 0$, on n'obtienne pas un résultat nul.

Si l'on pose

$$(7) \quad \chi = a \cos \alpha - \omega \sin \alpha,$$

on a

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d\chi}{d\alpha} = -\sin \alpha - \omega \cos \alpha, \\ \frac{d^2\chi}{d\alpha^2} = -\chi, \\ \frac{d\chi^2}{d\alpha^2} = a^2 + \omega^2 - \chi^2, \end{cases}$$

et l'équation (6) devient

$$(9) \quad g \frac{r}{r} = -\frac{d\chi}{d\alpha} [U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}],$$

ou

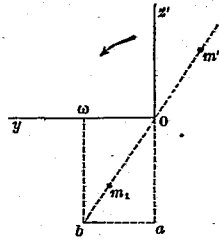
$$(9') \quad g \frac{r}{r} = \pm \sqrt{a^2 + \omega^2 - \chi^2} [U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}].$$

Soient (fig. 3)

$O\omega, Oa$ des longueurs égales à ω et a portées sur Oy et le prolongement de Oz ;

Ob la diagonale du parallélogramme, construit sur ces deux longueurs;

FIG. 3.



m_1, m'_1 les intersections de Ob avec le cercle de rayon $Om = r$, situées au-dessous et au-dessus de Oy .

a n'est autre chose que la projection sur Oz' de l'extrémité de la longueur $O\mu = \mu$ portée à partir du point O sur Oz .

D'après l'équation (6), γ est positif pour $\alpha = 0$; il faut donc prendre le signe + de l'expression (9'); γ varie ensuite d'une manière continue quand α croît de zéro jusqu'à $z'Ob$, c'est-à-dire jusqu'à ce que m se trouve en m_1 , position pour laquelle l'écart est nul; puis, cet écart devenant négatif, il faut prendre le signe — de cette dernière expression, jusqu'à ce que m se trouve en m'_1 , puis, à partir de là, le signe + jusqu'à Oz' .

L'écart γ atteint donc un maximum, par rapport à α , pour une position de m située dans la région $m'_1 z' m_1$, et un minimum dans l'autre région.

Les valeurs de χ , correspondant à m_1, m'_1 , sont respectivement

$$-\sqrt{a^2 + \omega^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2 + \omega^2} = Ob.$$

Écart moyen des projectiles lancés d'un même côté du plan de tir. — Cet écart ne sera autre chose que l'intégrale $\int \gamma d\alpha$, déduite de l'équation (9), divisée par $\frac{1}{2\sqrt{a^2 + \omega^2}}$, et prise entre les limites $+\sqrt{a^2 + \omega^2}$, et $-\sqrt{a^2 + \omega^2}$. Cette équation donne

$$\begin{aligned} -\frac{g}{r} \int \gamma d\alpha &= U'\chi + r\frac{\chi^2}{2} + \int \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} \cdot d\chi \\ &= U'\chi + r\frac{\chi^2}{2} - \frac{1}{8r} \left(w^2 + 8gh \log w - \frac{4g^2 h^2}{w^2} \right), \end{aligned}$$

en posant

$$\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} = (U' + r\chi) + w.$$

Mais la moyenne dont il s'agit est une fonction trop compliquée de a et ω pour que l'on puisse en tirer quelque connaissance utile : c'est pourquoi nous nous dispenserons de l'écrire.

Maximum et minimum de l'écart par rapport à α . — En égalant à zéro la dérivée de γ par rapport à α , on a

$$\frac{d^2\chi}{d\alpha^2} [U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}] + r \frac{d\chi^2}{d\alpha^2} \left(1 + \frac{U' + r\chi}{\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}} \right) = 0$$

ou

$$r \frac{d\chi}{d\alpha^2} = \chi \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh},$$

ou encore

$$(10) \quad r(a^2 + \omega^2 - \chi^2) = \chi \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh},$$

et enfin

$$(11) \quad 2U'r\chi^3 + \chi^2[U'^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2)r^2] - (a^2 + \omega^2)r^2 = 0.$$

Cette équation a une racine positive et peut avoir, suivant les valeurs de ses coefficients, deux racines négatives ou deux racines imaginaires. Dans le premier cas, les racines négatives sont inadmissibles; car, d'après l'équation (10), si l'on admet une valeur négative pour χ , il faut qu'elle soit plus grande en valeur absolue que $\sqrt{a^2 + \omega^2}$; mais alors, d'après l'équation (9), γ serait imaginaire.

La racine positive, portée dans la formule (9'), donnera pour γ deux valeurs égales et de signes contraires, qui représenteront respectivement son maximum et son minimum.

Donc les dispersions maximum de part et d'autre du plan de tir pour les éléments matériels, situés primitivement sur un même cercle, sont égales.

Le maximum de l'écart pour un même cercle croît avec la vitesse angulaire.

En vertu de l'équation (10), la formule (9) peut se mettre sous la forme

$$(12) \quad \gamma = \frac{1}{g} \sqrt{\chi r \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} [U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}]};$$

mais la même équation (10) donne

$$\frac{d\chi}{d\omega} \left[2\chi r + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} + \frac{U' + r\chi}{\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}} \right] = 2\omega r;$$

comme $\frac{d\chi}{d\omega}$ est positif, χ , par suite γ , croît avec ω .

Le maximum de l'écart croît avec le rayon du cercle.

On déduit de l'équation (10)

$$r\chi\sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh} + r^2\chi^2 = r^2(a^2 + \omega^2),$$

et de là que $\frac{dr\chi}{dr}$ est positif, puis, en vertu de la formule (12), que γ croît avec r .

Donc la dispersion maximum a lieu pour les éléments les plus éloignés de l'axe.

Maximum maximorum de l'écart.

Soient R le rayon moyen du projectile; Y l'écart maximum. Les équations (9') et (11) donnent

$$(13) \quad Y = \frac{R}{g} \frac{\sqrt{a^2 + \omega^2 - \chi^2}}{\chi} [U'\chi + R(a^2 + \omega^2)],$$

$$(14) \quad 2U'R\chi^3 + \chi^2[U'^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2)R^2] - (a^2 + \omega^2)^2R^2 = 0.$$

D'après des règles connues, la racine positive de cette dernière équation est inférieure à la plus petite des quantités

$$1 + \sqrt{\frac{(a^2 + \omega^2)^2 R}{2U'}},$$

$$1 + \frac{R^2(a^2 + \omega^2)^2}{2U'R + U'^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2)R^2} = 1 + \frac{R^2(a^2 + \omega^2)^2}{(U' + R)^2 + 2gh + 2(a^2 + \omega^2 - \frac{1}{2})R^2} [^*]$$

ainsi qu'à

$$\sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{2}},$$

comme on le reconnaît à l'inspection de l'équation.

[*] Règle de Biet.

La considération de ces limites facilitera notablement la résolution de l'équation (14) dans chaque cas particulier.

Influence de la vitesse radiale et de la rotation sur la portée des balles. — L'équation (5') donne

$$g \frac{x}{U} = U' + r\chi + \sqrt{(U' + r\chi)^2 + 2gh}.$$

Le maximum et le minimum de x correspondront respectivement au maximum $\sqrt{a^2 + \omega^2}$ et au minimum $-\sqrt{a^2 + \omega^2}$ de χ , c'est-à-dire aux points m'_1 et m_1 . Ils sont ainsi augmentés et diminués par l'influence de ω .

La rotation a donc pour effet de favoriser la dispersion des balles parallèlement au plan de tir.

