

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une intégrale définie

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 19 (1874), p. 55-56.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19_55_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'intégrale dont je veux parler, et que je représente par A, est la suivante :

$$(1) \quad A = \int_0^\pi dx \varphi \left(\frac{\sin^2 x}{1 \pm 2a \cos x + a^2} \right),$$

où a désigne un paramètre constant et φ une fonction arbitraire soumise seulement aux restrictions imposées par la nature même de l'intégrale A dont la valeur doit rester finie et déterminée.

J'ai reconnu que, quand la constante a (ou plutôt sa valeur absolue) est < 1 , on a simplement

$$(2) \quad A = \int_0^\pi \varphi(\sin^2 x) dx,$$

en sorte que le paramètre a n'influe pas du tout sur la valeur de A.

Si l'on suppose $a > 1$, il n'en sera plus ainsi. On aura alors

$$(3) \quad A = \int_0^\pi \varphi \left(\frac{\sin^2 x}{a^2} \right) dx.$$

Au reste, les deux équations (2) et (3) coïncident dans le cas limite de $a = 1$, et elles se déduisent toujours aisément l'une de l'autre par le changement de a en $\frac{1}{a}$, de sorte qu'il suffit d'établir par exemple l'équation (2) pour en conclure l'équation (3).

En prenant pour la fonction φ une simple puissance de la variable, on est conduit à des résultats obtenus jadis par Poisson, dans le XVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Cela seul suffirait pour fournir une démonstration rigoureuse de nos formules; mais j'engage nos jeunes lecteurs à en chercher une démonstration directe et générale. Ce sera pour eux un exercice utile.

