

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. GRAINDORGE

**Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux
dérivées partielles du second ordre**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 17 (1872), p. 426-432.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17_426_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations
aux dérivées partielles du second ordre;*

PAR J. GRAINDORGE,

Docteur ès sciences, Répétiteur à l'Université de Liège.

Dans un Mémoire publié en 1784 [*], Monge a considéré l'équation du second ordre

$$(1) \quad Rr + Ss + Tt = U,$$

R, S, T, U étant des fonctions de x, y, z, p, q .

Il énonce le théorème suivant :

Soient

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2$$

deux intégrales satisfaisant aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} dy - m dx = 0, \\ Rmdp + Tdq - Umdx = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles m est l'une des racines de l'équation

$$(3) \quad Rm^2 - Sm + T = 0;$$

l'équation

$$f_1 = \varphi(f_2)$$

sera une intégrale première de la proposée.

Si donc m' et m'' sont les deux racines de l'équation (3), on obtient

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784, p. 128.

deux intégrales du premier ordre de l'équation (1), et l'on peut facilement en déduire l'intégrale générale.

Monge n'a pas appliqué sa méthode, ni aucun géomètre après lui, aux cas particuliers où l'une quelconque, ou bien deux des dérivées du second ordre r, s, t ne figurent pas dans la proposée. Il n'est cependant pas difficile d'éviter, par un artifice bien simple, les résultats illusoires que présente alors le procédé de Monge. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

1° Si $R = 0$, l'équation (1) devient

$$(4) \quad Ss + Tt = U.$$

Dans ce cas, l'équation (3), qui donne, en général,

$$(5) \quad m = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R},$$

se réduit à la suivante :

$$Sm - T = 0.$$

On en déduit

$$m = \frac{T}{S}.$$

Cette valeur de m nous donne, pour les équations (2),

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{T}{S}, \quad Tdq - Udy = 0.$$

Quant à la seconde valeur de m , elle est, comme on le sait, infinie, et donne des résultats illusoires.

Mais on peut transformer les équations (2) de la manière suivante.

Observons d'abord que, pour $m = \infty$, on a

$$\frac{1}{m} = \frac{dx}{dy} = 0, \quad \text{ou} \quad dx = 0.$$

En outre, de (5) on tire, pour la valeur correspondante,

$$Rm = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2},$$

et pour $R = 0$, il vient

$$\lim Rm = S.$$

On a ainsi le nouveau système

$$(7) \quad dx = 0, \quad Sdp + Tdq - Udy = 0.$$

2° Lorsque $T = 0$, l'équation (1) devient

$$(8) \quad Rr + Ss = U.$$

On a alors, d'après (3),

$$m = 0, \quad m = \frac{S}{R}.$$

De la valeur $m = \frac{S}{R}$, on déduit

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{S}{R}, \quad Sdp - Udy = 0.$$

La valeur $m = 0$ donne

$$dy = 0,$$

et la seconde des équations (2) est illusoire.

Mais de

$$m = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R},$$

on conclut

$$\frac{T}{m} = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2};$$

en faisant $T = 0$, on a

$$\lim \frac{T}{m} = S.$$

La seconde équation (2) donne alors

$$Rdp + Sdq - Udx = 0,$$

et l'on a le système

$$(10) \quad dy = 0, \quad Rdp + Sdq - Udx = 0.$$

3° Lorsque $R = 0$, $T = 0$, l'équation (1) se réduit à la suivante :

$$(11) \quad Ss = U.$$

Les deux systèmes compris dans (2) deviennent alors

$$(12) \quad \begin{cases} dx = 0, & Sdp - Udy = 0, \\ dy = 0, & Sdq - Udx = 0. \end{cases}$$

Remarque. — On pourrait d'ailleurs trouver ces deux relations, ainsi que les précédentes, en remplaçant s par sa valeur déduite des équations

$$(13) \quad \begin{cases} dp = rdx + sdy, \\ dq = sdx + tdy. \end{cases}$$

Tirant s de la première, et substituant dans (11), on a

$$Sdp - Srdx = Udy;$$

d'où

$$\begin{aligned} Sdp &= Udy, \\ dx &= 0. \end{aligned}$$

De même, en substituant dans (11) la valeur de s tirée de la seconde équation (13), il vient

$$Sdq - Std y = Udx.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} Sdq &= Udx, \\ dy &= 0. \end{aligned}$$

Application. — Soit l'équation du second ordre

$$(14) \quad pqr - (1 + p^2)s = 0,$$

qui appartient aux surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont situées dans des plans parallèles au plan des zx .

Cette équation est de la forme (8) : les deux systèmes (9) et (10) nous donnent

$$(I) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+p^2}{pq}, \quad dp = 0;$$

$$(II) \quad dy = 0, \quad pq dp - (1+p^2) dq = 0.$$

Or du système (II) on tire facilement

$$\begin{aligned} y &= \text{const.}, \\ \beta \sqrt{1+p^2} &= q. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation

$$(15) \quad q = \sqrt{1+p^2} f'(y)$$

sera une première intégrale intermédiaire de l'équation (14).

D'un autre côté, le système (I) nous donne

$$dp = 0 \quad \text{ou} \quad p = \alpha.$$

En combinant cette dernière équation avec les relations

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1+\alpha^2}{\alpha q}, \\ dz &= p dx + q dy, \end{aligned}$$

on obtient

$$\alpha dz + dx = 0;$$

d'où

$$\alpha z + x = \beta.$$

Par suite, l'équation

$$(16) \quad x + pz = \varphi(p),$$

sera une seconde intégrale intermédiaire de (14).

Il nous reste maintenant à intégrer l'équation

$$dz = p dx + q dy,$$

ce que l'on pourrait faire en prenant y et p pour variables indépendantes [*].

Mais, en appliquant la méthode de Jacobi, on peut se contenter de la première intégrale intermédiaire (15).

En effet, on en déduit le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{-pf'(y)} = \frac{dp}{0}.$$

On a donc, d'après cela,

$$p = a_1;$$

par suite,

$$q = \sqrt{1+a_1^2} f'(y).$$

Remplaçant p, q par ces valeurs dans

$$dz = p dx + q dy,$$

il vient

$$dz = a_1 dx + \sqrt{1+a_1^2} f'(y) dy;$$

d'où

$$z - \varphi(a_1) = a_1 x + \sqrt{1+a_1^2} f(y).$$

L'intégrale générale s'obtient alors en éliminant a_1 entre les deux équations

$$z - \varphi(a_1) - a_1 x - \sqrt{1+a_1^2} f(y) = 0,$$

$$x + \varphi'(a_1) + \frac{a_1 f(y)}{\sqrt{1+a_1^2}} = 0.$$

Ce sont les deux équations auxquelles M. Serret est arrivé.

[*] Voir le *Traité de Calcul intégral* de M. SERRET, p. 663.

En appliquant les résultats que je viens d'exposer ci-dessus aux équations considérées par Laplace (*), on parvient très-rapidement aux formules que l'auteur de la *Mécanique céleste* a trouvées par de nombreuses transformations.

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1773.

FIN DU TOME DIX-SEPTIÈME (2^e SÉRIE).