

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Démonstration géométrique d'une proposition due à M. Bertrand

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 17 (1872), p. 403-405.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__403_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Démonstration géométrique d'une proposition
due à M. Bertrand;*

PAR M. A. MANNHEIM.

Dans une *Note sur la théorie des normales à une même surface* [*], M. Bertrand généralise une proposition, qui lui est due, en établissant une relation entre les positions de deux normales à une surface menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux tracés sur cette surface à partir d'un point.

Je me propose aujourd'hui de montrer comment on arrive à cette relation en faisant usage du mode de représentation des normales que j'ai fait connaître dans mon *Mémoire sur les pincesaux de droites* [**].

Soient o (*fig. 1*) le point de la surface à partir duquel on trace les directrices de deux normales, θ l'angle de ces directrices, G la normale à la surface au point o , f_1, f_2 les centres de courbure principaux de la surface situés sur G .

La droite auxiliaire $f'_1 f'_2$ d'une normale étant telle que l'angle $f'_2 o f'_1$ est droit, l'enveloppe des droites auxiliaires de toutes les normales autour de o est une conique dont G est un des axes, dont f_1, f_2 sont les sommets, et dont le point o est un des foyers.

Supposons que $f'_1 f'_2$ et $f''_1 f''_2$ soient les deux droites auxiliaires correspondant aux deux normales dont les directrices comprennent entre elles l'angle θ . Je prends, par rapport à G , la droite hj symétrique

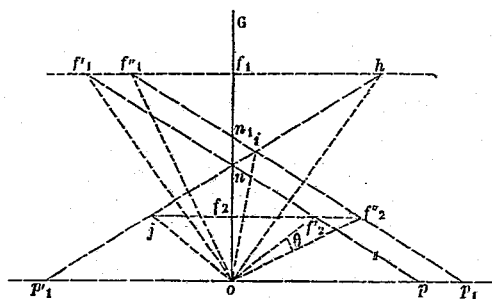
[*] *Journal de Mathématiques*, 1^{re} série, t. XII, p. 343.

[**] *Id.*, 2^e série, t. XVII, p. 109.

de $f'_1 f'_2$: cette droite, les deux droites auxiliaires et $f_1 f'_1$, $f_2 f'_2$ sont des tangentes à la conique dont je viens de parler.

On sait que l'angle, sous lequel on voit du foyer d'une conique les segments interceptés sur des tangentes quelconques de cette courbe par deux tangentes fixes, est constant. D'après cela, l'angle $f''_2 o f'_2$ est

FIG. 1.



égal à l'angle ion ; mais le premier de ces angles indique sur la figure l'angle que comprennent entre elles les directrices des normales dont les droites auxiliaires sont $f'_1 f'_2$, $f''_1 f''_2$. Nous voyons ainsi que l'angle ion est égal à θ .

Les côtés de l'angle $p'_1 ip_1$, déterminent sur les deux transversales op_1 , on_1 des segments entre lesquels on a la relation

$$\left(\frac{1}{on} - \frac{1}{on_1}\right) \frac{1}{\sin ion} = \left(\frac{1}{op_1} + \frac{1}{op'_1}\right) \frac{1}{\sin p'_1 oi};$$

mais $op'_1 = op$; on a donc

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{on} - \frac{1}{on_1}}{\frac{1}{op} + \frac{1}{op_1}}.$$

Si nous supposons que les directrices sont des courbes géodésiques : on , on_1 sont les rayons de première courbure, et op , op_1 les rayons de seconde courbure de ces directrices.

On peut alors écrire cette relation ainsi :

$$\text{tang} \theta = \frac{\frac{\psi}{ds} - \frac{\psi'}{ds}}{\frac{\varphi}{ds} + \frac{\varphi'}{ds}},$$

en introduisant les angles de contingence de ces courbes et les angles que comprennent entre eux les plans osculateurs infiniment voisins.

Supprimons dans cette formule le facteur ds , il vient

$$\text{tang} \theta = \frac{\psi - \psi'}{\varphi + \varphi'},$$

qui est la relation que l'on doit à M. Bertrand.

