

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 15 (1870), p. 7-8.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1870\\_2\\_15\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__7_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;*

**PAR M. J. LIOUVILLE.**

« ... Je veux vous parler cette fois de l'intégrale

$$A = \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{arc} \operatorname{tang} x \frac{dx}{x}$$

que je ramène à celle-ci :

$$B = \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

ou bien encore à celle-ci :

$$C = \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

que l'on rattache immédiatement à la précédente. La fonction désignée par  $f$  est quelconque, sous la condition naturellement sous-entendue que chacune des trois intégrales

A, B, C,

dont il s'agit, ait une valeur finie et un sens précis.

On prouve en effet tout d'abord, et très-facilement, que

$$B = 2C.$$

Puis, d'un autre côté, on démontre que

$$A = \frac{\pi}{4} B.$$

» En d'autres termes, on a l'équation

$$\int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{arc} \operatorname{tang} x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

que je crois nouvelle, et que vous trouverez peut-être digne d'attirer un moment votre attention. »

