

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

DE LA GOURNERIE

**Note sur les quadricuspidales**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 15 (1870), p. 264-266.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1870\\_2\\_15\\_264\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15_264_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Note sur les quadricuspides;*

PAR M. DE LA GOURNERIE.

Le remarquable Mémoire que M. Laguerre a publié dans le *Journal de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 193, a rappelé mon attention sur les quadricuspides. Je connais relativement à ces surfaces plusieurs propositions dont la théorie peut être facilement rattachée au mode de génération que M. Laguerre fait connaître au n<sup>o</sup> 19 de son travail.

1. Considérons sur une surface du second ordre  $S$  une courbe du quatrième ordre (première espèce)  $K$ ; à un point  $\alpha$  de  $K$  passent deux génératrices de  $S$  qui rencontrent de nouveau cette courbe, l'une en  $\beta$ , l'autre en  $\gamma$ ; lorsque le point  $\alpha$  parcourt  $K$ , la droite  $\beta\gamma$  engendre une quadricuspide.

Chaque quadricuspide ayant  $K$  pour ligne nodale peut être engendrée de cette manière à l'aide de l'une quelconque de quatre surfaces  $S$ . Les surfaces du second ordre qui passent par une même courbe du quatrième ordre forment donc, sous ce rapport, une involution du quatrième ordre. Les surfaces doubles de cette involution appartiennent deux à deux à trois groupes, et par suite l'involution est du genre de celles que j'ai étudiées dans l'introduction de mon Mémoire sur les lignes spiriques [\*]. De là découlent diverses propositions auxquelles je ne m'arrêterai pas.

2. On peut facilement étendre aux polygones gauches formés sur

---

[\*] *Journal de Mathématiques*, 1869.

une surface du second ordre par des génératrices rectilignes et inscrits dans une courbe du quatrième ordre le beau théorème donné par M. Poncelet sur les polygones inscrits dans une conique et circonscrits à une autre. Il suffit de prendre sur un plan la projection de la surface et celle de la courbe, le centre de projection étant placé au sommet de l'un des quatre cônes du second ordre qui sont circonscrits à cette ligne. En ne considérant que des quadrilatères, je dirai : A un point  $\alpha$  d'une courbe du quatrième ordre  $K$  tracée sur une surface du second ordre  $S$  passent deux génératrices qui rencontrent de nouveau la courbe, l'une en  $\beta$ , l'autre en  $\gamma$ ; de ces derniers points partent deux autres génératrices qui se coupent en un point  $\alpha'$ . Si ce point est sur la courbe  $K$ , il y restera quelle que soit la position que le point  $\alpha$  occupe sur elle. La quadricuspidale lieu des droites  $\beta\gamma$  se réduit alors à une surface du quatrième ordre dont j'ai fait connaître les principales propriétés, et que j'ai appelée *quadricuspidale-limite* [\*].

Cette circonstance se présente pour toute surface donnée comme double dans l'involution du quatrième ordre dont j'ai parlé. Ainsi par la courbe  $K$  passent six surfaces du second ordre, qui deux à deux déterminent une même quadricuspidale-limite par le mode de génération que j'ai indiqué n° 1. On trouve de cette manière les trois quadricuspidales-limites qui, comme je l'ai établi ailleurs, passent par une courbe du quatrième ordre.

Les deux couples de surfaces du second ordre qui déterminent deux quadricuspidales-limites, passant par une même courbe du quatrième ordre, forment un faisceau harmonique.

3. On peut étudier les quadricuspidales auxquelles donnent naissance les courbes du quatrième ordre tracées sur une surface du second ordre et correspondant aux diverses valeurs d'un paramètre variable. On trouve, par exemple, que six des lignes de courbure d'une surface du second ordre sont circonscrites à des quadrilatères gauches

---

[\*] *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, premier Mémoire, p. 61 et 114.

formés par des segments de génératrices. Ces lignes sont réparties en trois couples. Chaque axe de la surface forme une directrice rectiligne pour les deux quadricuspidales qui correspondent à un même couple.

Je crois inutile d'entrer dans plus de détails sur ces questions.

