JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

FÉLIX LUCAS

Etude sur la mécanique des atomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 15 (1870), p. 137-192.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__137_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Étude sur la mécanique des atomes [*];

PAR M. FÉLIX LUCAS,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

§ I. — *Actions intérieures d'un système atomique.*

SOMMAIRE : Définition d'un système atomique. — Données analytiques. — Notations. — Action totale en un point. — Effort total. — Effort de déplacement. — Effort de déformation. — Déplacement auxiliaire. — Relations entre les efforts. — Formules au potentiel.

1. *Définition d'un système atomique.* — Soit un système de corps absolument quelconques pour leurs formes, leurs masses et les substances qui les composent. Assignons-leur respectivement les indices

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

qui nous serviront à les désigner.

Disposons ces corps n'importe comment dans l'espace, pourvu toutefois que leurs distances soient immensément grandes relativement à leurs dimensions. Ces dernières deviendront négligeables, en sorte que nous pourrons concentrer par la pensée la matière de chaque corps en son centre de gravité.

Les points matériels ou *atomes* ainsi obtenus seront des *centres d'action* s'attirant ou se repoussant les uns les autres suivant des lois déterminées. Leur ensemble constitue ce que nous appelons un *système atomique*.

[*] Des recherches préliminaires ayant trait au même sujet ont donné lieu à un Rapport à l'Institut, par M. de Saint-Venant. (Voir *Comptes rendus*, séance du 14 février 1870.)

2. *Données analytiques.* — Pour définir *géométriquement* un pareil système, il suffit de connaître pour chaque atome m les trois coordonnées

$$X_m, Y_m, Z_m,$$

qui rapportent à trois axes rectangulaires quelconques sa position dans l'espace.

Pour le définir *mécaniquement*, il faut d'abord ajouter à ces données la masse g_m de chaque atome m. Il faut ensuite se donner les expressions analytiques de l'*action* et de la *réaction* qui existent entre les atomes m et n, m et n étant deux nombres inégaux quelconques pris dans la série

$$1, 2, 3, \ldots, N.$$

Nous admettrons que l'action exercée par m sur n tombe sur la droite mn. Quand elle tendra à rapprocher n de m, nous dirons qu'il y a *attraction*, et nous regarderons la force comme *positive;* dans le cas contraire, il y aura *répulsion*, et la force sera *négative*. Nous supposerons cette action de telle nature qu'on puisse la représenter en grandeur et en signe par l'expression

$$g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}),$$

$R_{m,n}$ désignant la distance (positive) des points m et n, $f_{m,n}$ une fonction continue quelconque.

Nous admettrons en outre que la réaction de n sur m soit égale à l'action de m sur n, mais dirigée en sens opposé.

Les combinaisons deux à deux des indices

$$1, 2, 3, \ldots, N$$

étant au nombre de

$$\frac{N(N-1)}{2},$$

il y a autant de fonctions f correspondantes, que nous supposerons données.

3. *Notations.* — Afin de simplifier les écritures qui vont suivre, nous poserons

$$(1)\qquad \frac{1}{R_{m,n}}\, g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) = F_{m,n},$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} X_m - X_n = X_{m,n}, \\ Y_m - Y_n = Y_{m,n}, \\ Z_m - Z_n = Z_{m,n}. \end{cases}$$

Il en résultera

$$(3)\qquad F_{m,n} = F_{n,m},$$

$$(4)\qquad \begin{cases} X_{m,n} = -X_{n,m}, \\ Y_{m,n} = -Y_{n,m}, \\ Z_{m,n} = -Z_{n,m}. \end{cases}$$

Le signe S_m désignera une somme de termes obtenus en donnant successivement à m toutes les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

sans aucune exception.

Le signe Σ_n, qui portera sur des termes où figureront les deux indices m et n, désignera une somme de termes obtenus en donnant à n toutes les valeurs de la série précédente, sauf la valeur m.

4. *Action totale en un point.* — Les trois composantes U_m, V_m, W_m de l'action totale exercée en m par les autres points du système atomique ont pour valeurs

$$(5)\qquad \begin{cases} U_m = \Sigma_n X_{n,m} F_{m,n}, \\ V_m = \Sigma_n Y_{n,m} F_{m,n}, \\ W_m = \Sigma_n Z_{n,m} F_{m,n}. \end{cases}$$

Comme les forces intérieures sont toutes deux à deux égales et contraires, elles se feraient équilibre sur le système atomique s'il était sup-

posé rigide. De là les six équations

$$S_m U_m = S_m V_m = S_m W_m = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} S_m(V_m X_m - U_m Y_m) = 0, \\ S_m(W_m Y_m - V_m Z_m) = 0, \\ S_m(U_m Z_m - W_m X_m) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

5. *Effort total.* — Si les points m et n venaient à subir des déplacements infinitésimaux (x_m, y_m, z_m) et (x_n, y_n, z_n), les trois projections de l'action exercée par le second de ces points sur le premier subiraient des variations représentées par les expressions

$$\begin{cases} X_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_{n,m}, \\ Y_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_{n,m}, \\ Z_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_{n,m}, \end{cases} \tag{8}$$

dans lesquelles

$$\begin{cases} x_{n,m} = x_n - x_m, \\ y_{n,m} = y_n - y_m, \\ z_{n,m} = z_n - z_m, \end{cases} \tag{9}$$

$$r_{m,n} = \frac{X_{n,m}}{R_{m,n}} x_{n,m} + \frac{Y_{n,m}}{R_{m,n}} y_{n,m} + \frac{Z_{n,m}}{R_{m,n}} z_{n,m}. \tag{10}$$

Supposons maintenant que le système atomique vienne à changer de figure infiniment peu, de manière que chacun de ses points subisse un déplacement infinitésimal, l'action totale au point m éprouvera une variation représentée par les formules

$$\begin{cases} u_m = \Sigma_n(X_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_{n,m}), \\ v_m = \Sigma_n(Y_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_{n,m}), \\ w_m = \Sigma_n(Z_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_{n,m}). \end{cases} \tag{11}$$

Nous appelons *effort total*, ou simplement *effort*, au point m, la résultante de ces trois petites forces.

Les expressions (11) sont linéaires relativement aux (x_m, y_m, z_m) et aux (x_n, y_n, z_n). On peut donc décomposer l'effort total en deux parties, savoir :

1° L'effort qui résulterait du seul déplacement du point m, tous les autres points restant fixes ;

2° L'effort qui résulterait des déplacements de tous les autres points, m étant supposé maintenu dans sa position primitive.

Nous pouvons appeler la première composante *effort de déplacement*, et la seconde *effort de déformation*. En désignant respectivement leurs projections par $(u'_m, v'_m w'_m)$, et (u''_m, v''_m, w''_m), nous aurons

$$(12)\qquad \begin{cases} u_m = u'_m + u''_m, \\ v_m = v'_m + v''_m, \\ w_m = w'_m + w''_m. \end{cases}$$

6. *Effort de déplacement.* — Les valeurs de u'_m, v'_m, w'_m s'obtiennent en faisant

$$(13)\qquad x_n = y_n = z = 0$$

dans les formules (11).

Posant, pour simplifier les écritures,

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum_n \left(\frac{X^2_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} + F_{m,n} \right) = g_m A_m, \\ \sum_n \left(\frac{Y^2_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} + F_{m,n} \right) = g_m B_m, \\ \sum_n \left(\frac{Z^2_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} + F_{m,n} \right) = g_m C_m; \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} \sum_n \frac{X_{n,m} Y_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} = g_m P_m, \\ \sum_n \frac{Y_{n,m} Z_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} = g_m Q_m, \\ \sum_n \frac{Z_{n,m} X_{n,m}}{R_{m,n}} F'_{m,n} = g_m R_m, \end{cases}$$

on trouve

$$(16)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{g_m} u'_m = A_m x_m + P_m y_m + R_m z_m, \\ -\frac{1}{g_m} v'_m = P_m x_m + B_m y_m + Q_m z_m, \\ -\frac{1}{g_m} w'_m = R_m x_m + Q_m y_m + C_m z_m \end{cases}$$

pour expressions des trois projections de l'effort de déplacement.

7. *Effort de déformation.* — Les valeurs de u''_m, v''_m, w'' s'ob-

tiennent en faisant

$$x_m = y_m = z_m = 0 \tag{17}$$

dans les formules (11). Il vient ainsi

$$\left\{\begin{aligned} u''_m &= \Sigma_n (x_n F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_n), \\ v''_m &= \Sigma_n (y_n F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_n), \\ w''_m &= \Sigma_n (z_n F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_n). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

La valeur de $r_{m,n}$, déduite de la formule (10), est

$$r_{m,n} = \frac{X_{n,m}}{R_{n,m}} x_n + \frac{Y_{n,m}}{R_{n,m}} y_n + \frac{Z_{n,m}}{R_{n,m}} z_n. \tag{19}$$

8. *Déplacement auxiliaire.* — Posons

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{g_m} u''_m &= A_m \xi_m + P_m \eta_m + R_m \zeta_m, \\ -\frac{1}{g_m} v''_m &= P_m \xi_m + B_m \eta_m + Q_m \zeta , \\ -\frac{1}{g_m} w''_m &= R_m \xi_m + Q_m \eta_m + C_m \zeta_m. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Les trois inconnues ξ_m, η_m, ζ_m déterminées par ces équations pourront être regardées comme les projections d'une droite infinitésimale dont elles feront connaître la grandeur et la direction.

Si, rendant fixes tous les atomes à l'exclusion de m, on imprimait à ce dernier un déplacement égal et parallèle à la droite ci-dessus définie, l'effort correspondant aurait pour projections u''_m, v''_m, w''_m. Au moyen de ce déplacement auxiliaire ξ_m, η_m, ζ_m, les valeurs des projections de l'effort total défini au n° 5, peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{g_m} u_m &= A_m (x_m + \xi_m) + P_m (y_m + \eta_m) + R_m (z_m + \zeta_m), \\ -\frac{1}{g_m} v_m &= P_m (x_m + \xi_m) + B_m (y_m + \eta_m) + Q_m (z_m + \zeta_m), \\ -\frac{1}{g_m} w_m &= R_m (x_m + \xi_m) + Q_m (y_m + \eta_m) + C_m (z_m + \zeta_m). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

9. *Relations entre les efforts.* — Après comme avant la déformation, les forces intérieures sont deux à deux égales et contraires. Si l'on supposait que le système devînt rigide, ces forces se feraient équilibre.

Le système déformé donne donc naissance à six équations analogues à celles des groupes (6) et (7), et qui se déduisent de celles-ci en remplaçant X_m, Y_m, Z_m par $(X_m + x_m)$, $(Y_m + y_m)$, $(Z_m + z_m)$, et V_m, U_m, W_m par $(U_m + u_m)$, $(V_m + v_m)$, $(W_m + w_m)$.

Négligeant les infiniment petits du second ordre, et tenant compte de (6) et (7), on trouve ainsi

$$S_m u_m = S_m v_m = S_m w_m = 0, \tag{22}$$

$$\begin{cases} S_m(V_m x_m - U_m y_m) + S_m(v_m X_m - u_m Y_m) = 0, \\ S_m(W_m y_m - V_m z_m) + S_m(w_m Y_m - v_m Z_m) = 0, \\ S_m(U_m z_m - W_m x_m) + S_m(u_m Z_m - w_m X_m) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

10. *Formules au potentiel.* — Si l'on pose

$$\Phi_m = -\Sigma \int g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n})\, dR_{m,n}, \tag{24}$$

la fonction Φ_m représente le *potentiel* relatif au point m dans le système primitif.

On trouve, en prenant ses dérivées premières,

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi_m}{dX_m} = U_m, \\ \dfrac{d\Phi_m}{dY_m} = V_m, \\ \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m} = W_m; \end{cases} \tag{25}$$

et, en prenant ses dérivées secondes,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_m}{dX_m^2} = -g_m A_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dY_m^2} = -g_m B_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dZ_m^2} = -g_m C_m, \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_m}{dX_m\, dY_m} = \dfrac{d^2\Phi_m}{dY_m\, dX_m} = -g_m P_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dY_m\, dZ_m} = \dfrac{d^2\Phi_m}{dZ_m\, dY_m} = -g_m Q_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dZ_m\, dX_m} = \dfrac{d^2\Phi_m}{dX_m\, dZ_m} = -g_m R_m. \end{cases} \tag{27}$$

§ II. — *Statique atomique.*

SOMMAIRE : Objet de ce paragraphe. — Équations fondamentales. — Équations inverses. — Ellipsoïde. — Axes principaux des coordonnées. — Divers modes d'équilibre. — Paramètres physiques. — Constitution des corps. — Phénomènes calorifiques. — Mouvements infinitésimaux.

1. *Objet de ce paragraphe.* — Assujettissons tous les points d'un système atomique à une fixité absolue. L'action totale au point m prendra une direction et une intensité que nous pourrions calculer au moyen des formules précédemment établies.

Imaginons qu'on applique à ce point m une force égale et contraire à cette action totale. Détruisons ensuite sa fixité, sans lui imprimer aucune vitesse; il se trouvera évidemment en équilibre et dans un état de repos absolu.

Cela posé, assujettissons la force auxiliaire à rester, quoi qu'il arrive, constante en grandeur et en direction, et supposons qu'on donne au point m divers déplacements infinitésimaux autour de sa position d'équilibre. A chacun de ces déplacements correspondra un *effort* de grandeur et de direction déterminées.

Il existe, entre les déplacements et les efforts, certaines lois de dépendance que nous allons étudier.

2. *Équations fondamentales.* — A cet effet, nous désignerons par :

x, y, z les trois projections d'un déplacement quelconque;

u, v, w celles de l'effort correspondant;

g la masse du point m;

A, B, C, P, Q, R, les paramètres constants relatifs au point m, que nous avons précédemment représentés par A_m, B_m, C_m, P_m, Q_m, R_m.

Nous aurons alors pour équations fondamentales

$$(1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{u}{g} = Ax + Py + Rz, \\ -\dfrac{v}{g} = Px + By + Qz, \\ -\dfrac{w}{g} = Rx + Qy + Cz. \end{cases}$$

Ces équations étant linéaires, on voit qu'*à des déplacements opérés suivant une même droite correspondent des efforts dirigés sur des droites parallèles entre elles; les intensités des efforts sont proportionnelles aux amplitudes des déplacements.*

3. *Équations inverses.* — Des équations (1) on peut déduire des équations inverses, exprimant x, y, z au moyen de u, v, w.

Formons en effet le déterminant symétrique

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & P & R \\ P & B & Q \\ R & Q & C \end{vmatrix} \tag{2}$$

et désignons par a, b, c, p, q, r ses mineurs relatifs à A, B, C, P, Q, R.

Posons ensuite

$$\begin{cases} a = A'\Delta, & b = B'\Delta, & c = C'\Delta, \\ p = P'\Delta, & q = Q'\Delta, & r = R'\Delta; \end{cases} \tag{3}$$

nous aurons

$$\begin{cases} -gx = A'u + P'v + R'w, \\ -gy = P'u + B'v + Q'w, \\ -gz = R'u + Q'v + C'w. \end{cases} \tag{4}$$

4. *Ellipsoïde.* — Si la direction du déplacement vient à varier de toutes les manières possibles et qu'en même temps son amplitude reste constante, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{5}$$

r désignant cette amplitude.

On déduit alors des équations (4)

$$(A'u + P'v + R'w)^2 + (P'u + B'v + Q'w)^2 + (R'u + Q'v + C'w)^2 = g^2 r^2. \tag{6}$$

Par conséquent, en menant par un point quelconque de l'espace des lignes égales et parallèles aux divers efforts, on obtient pour lieu géométrique des extrémités de ces droites la surface d'un *ellipsoïde*.

5. *Axes principaux des coordonnées.* — A chaque valeur de r correspond un ellipsoïde particulier; de là une famille de surfaces. *Tous ces ellipsoïdes sont semblables et semblablement orientés.* Ils admettent tous un même système de *plans principaux*, auxquels nous pouvons rapporter nos coordonnées.

Nous faisons ainsi disparaître dans l'équation (6) les termes en uv, uw, vw. On a donc

$$P' = Q' = R' = 0, \tag{7}$$

et les équations (4) deviennent

$$\begin{cases} -gx = A'u, \\ -gy = B'v, \\ -gz = C'w. \end{cases} \tag{8}$$

Posons enfin

$$A'H = B'K = C'L = 1, \tag{9}$$

et nous aurons

$$\begin{cases} \frac{1}{g}u = -Hx, \\ \frac{1}{g}v = -Ky, \\ \frac{1}{g}w = -Lz. \end{cases} \tag{10}$$

Ces équations expriment, sous la forme la plus simple, les lois de dépendance entre les efforts et les déplacements correspondants.

Pour qu'un déplacement et l'effort qu'il engendre tombent tous les deux sur la même droite, de manière à former un angle nul ou égal à π, il faut et suffit que cette droite soit parallèle à un des axes principaux des coordonnées.

6. *Divers modes d'équilibre.* — Désignons par O la position initiale de l'atome m.

Si les trois paramètres H, K, L sont *positifs*, l'effort (u, v, w) en-

gendré par un déplacement quelconque (x, y, z) tend à rapprocher m du point O. Il y a donc équilibre *stable*.

Si ces trois paramètres sont *nuls*, un déplacement quelconque n'engendre aucun effort appréciable. L'équilibre est *indifférent*.

Si ces trois paramètres sont *négatifs*, l'effort a toujours une tendance à augmenter l'amplitude de l'écartement. Il y a équilibre *instable*.

Le point O se comporte, dans le premier cas, comme un foyer d'attraction; dans le second cas, il est inactif; dans le dernier cas, il est répulsif.

Dans le premier cas, l'atome m rappelle à notre esprit la molécule d'un *solide;* dans le second, celle d'un *liquide;* dans le troisième, celle d'un *gaz*.

Si l'*un* des trois paramètres était *nul*, les *deux* autres étant *positifs*, ou encore si l'*un* de ces paramètres était *positif*, les *deux* autres étant *nuls*, l'équilibre serait à la fois *indifférent et stable*. La solidité serait incomplète; l'atome m pourrait représenter la molécule d'un *corps pâteux*.

Si l'*un* des paramètres était *négatif*, les *deux* autres étant *nuls*, ou encore si l'*un* des paramètres était *nul*, les *deux* autres étant *négatifs*, l'équilibre serait *instable et indifférent*. Il y aurait gazéité imparfaite; l'atome m rappellerait à l'esprit la molécule d'une *vapeur naissant d'un liquide*.

Les combinaisons suivantes :

deux paramètres *positifs* et *un négatif*,
un paramètre *positif*, un *nul* et *un négatif*,
un paramètre *positif* et *deux négatifs*,

caractérisées par la coexistence des signes + et −, donnent naissance à un équilibre à la fois *stable* et *instable;* l'atome m peut alors représenter la molécule d'une *vapeur émanant d'un solide*.

7. *Paramètres physiques.* — Ainsi donc les valeurs des coefficients H, K, L servent à caractériser l'état physique de l'atome m; nous les appellerons pour ce motif *paramètres physiques*.

Ces paramètres sont les valeurs particulières que prennent A, B, C dans les équations (1), lorsqu'on rapporte le système atomique aux

plans principaux des coordonnées relatifs au point m. Alors P, Q, R sont évidemment nuls.

En désignant par X, Y, Z les coordonnées du point O rapportées à ces plans et par Φ le potentiel relatif au point m, on a

$$(11)\qquad \begin{cases} gH = \dfrac{d^2\Phi}{dX^2}, \\ gK = \dfrac{d^2\Phi}{dY^2}, \\ gL = \dfrac{d^2\Phi}{dZ^2}. \end{cases}$$

Nous voyons, par ces formules, que les *paramètres physiques* de l'atome m dépendent non-seulement des masses atomiques et de la nature des actions à distance, mais aussi de la configuration géométrique du système.

Supposons que la figure se déforme suivant une loi continue quelconque, le point m étant maintenu dans sa position primitive O par une force auxiliaire constamment égale et contraire à l'action totale en ce point. Les valeurs de H, K, L subiront elles-mêmes des variations continues; elles pourront passer par zéro et changer de signes. Il se produira dès lors au point m des changements d'état physique.

8. *Constitution des corps.* — Quel que soit l'état physique d'un corps naturel, on admet aujourd'hui que ce corps est composé de molécules séparées entre elles par des intervalles infiniment grands relativement à leurs dimensions et agissant les unes sur les autres en fonction des distances.

En reportant par la pensée la matière de chaque molécule sur le point mathématique qu'elle admet pour centre de gravité, on obtient un système atomique.

Cela posé, considérons d'abord un corps solide. Dans le système atomique correspondant, les trois *paramètres physiques* seront *positifs* en chaque point. L'équilibre réalisé à un moment donné sous l'action de forces extérieures quelconques sera doué de *stabilité*. Les positions correspondantes des atomes jouant alors le rôle des centres attractifs, le corps présentera une certaine résistance aux déformations.

Si une cause accidentelle vient le comprimer ou le dilater, il conservera comme une tendance à reprendre sa forme première. De là les phénomènes qui constituent l'*élasticité* du solide.

Dans un liquide parfait, les trois paramètres physiques se trouveraient nuls en chaque point. Un tel corps n'existe pas dans la nature. Mais on connaît des corps *presque liquides*. Les valeurs de H, K, L sont alors très-faibles en chaque point. De là des équilibres presque indifférents auxquels est due la *viscosité* du corps.

Les molécules d'un gaz ne sont jamais en repos; elles n'oscillent jamais autour de positions moyennes. Si l'on pouvait à un moment donné détruire leurs vitesses et appliquer à chacune d'elles une force extérieure capable de la mettre en équilibre, on n'obtiendrait ainsi qu'un *équilibre instable*. Dans le système atomique correspondant, les trois paramètres physiques seraient *négatifs* en chaque point. Au moindre trouble apporté par une cause accidentelle, les positions primitives des atomes deviendraient comme des foyers répulsifs. La *force expansive* du gaz apparaîtrait aussitôt.

9. *Phénomènes calorifiques.* — Considérons maintenant un corps, tel que le plomb, solide à la température ordinaire, et soumettons-le à l'action d'une chaleur croissante. Les paramètres physiques sont, au début, positifs en chaque point. A mesure que le corps se dilate, ils vont en décroissant, et la solidité diminue. Bientôt ces paramètres deviennent assez faibles pour que le métal prenne un état quasi-liquide. Dès qu'un certain nombre d'entre eux passent au négatif, des vapeurs commencent à se dégager.

Les changements d'état des corps sous l'action du calorique se présentent ainsi comme la conséquence directe des déformations graduelles qu'ils subissent. Il n'est donc pas nécessaire, comme on l'a cru souvent, pour expliquer ces phénomènes, d'attribuer une forme compliquée, et par suite invraisemblable, aux expressions analytiques des actions à distance. Notre explication repose simplement sur les lois incontestables de la continuité, sans rien conjecturer sur la nature des forces moléculaires.

10. *Mouvements infinitésimaux.* — Supposons qu'après avoir écarté

le point m infiniment peu de sa position primitive O, on l'abandonne à lui-même en lui imprimant une vitesse initiale quelconque, un phénomène de mouvement prendra naissance. Tant que le rayon vecteur Om restera infinitésimal relativement aux distances atomiques, les lois du mouvement seront exprimées par les équations différentielles

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{H}x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{K}y, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\mathrm{L}z. \end{cases}$$

Considérons la première en particulier.

Si l'on a $\mathrm{H} > 0$, l'intégration donne

$$(13)\qquad x = \mu \sin t\sqrt{\mathrm{H}} + \nu \cos t\sqrt{\mathrm{H}},$$

μ et ν désignant deux constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales du mouvement. La projection du mobile sur l'axe des x exécute alors une oscillation dont la période est $\frac{2\pi}{\sqrt{\mathrm{H}}}$.

Dans l'hypothèse $\mathrm{H} < 0$, on a

$$(14)\qquad x = \mu e^{t\sqrt{-\mathrm{H}}} + \nu e^{-t\sqrt{-\mathrm{H}}}.$$

La projection du rayon vecteur Om sur l'axe des x finit par croître sans limite assignable.

Si H est très-voisin de zéro, quel que soit son signe, on trouve simplement

$$(15)\qquad x = \mu t + \nu;$$

en sorte que le mouvement projeté sur l'axe des x est rectiligne et uniforme.

La seconde et la troisième équation du groupe (12), étant de même forme que la première, donnent lieu à des intégrations analogues.

Cela posé, occupons-nous du mouvement effectif du mobile m.

Si les trois paramètres physiques sont positifs, le rayon vecteur Om admet un *maximum*. Les équations finies analogues à (13) s'appliquent indéfiniment au phénomène. Dans le cas particulier où l'on aurait

$$H = K = L,$$

il y aurait *oscillation* sur une droite déterminée. Plus généralement la trajectoire offre une infinité de points de rebroussement; elle va et vient dans divers sens en conservant une sorte d'affinité pour sa position primitive.

Si le signe négatif affecte un ou deux des paramètres, si encore il les affecte tous les trois, la trajectoire acquiert une branche infinie. Dans le premier cas, cette branche s'enroule autour d'une droite; dans le second cas, elle ondule de part et d'autre d'un plan; en dernier lieu, elle est comparable à la branche infinie d'une parabole gauche. Les équations différentielles (12) et, par suite, les équations finies correspondantes ne peuvent alors embrasser qu'une partie du phénomène réel. Dès que le rayon vecteur Om devient comparable aux distances atomiques, des lois nouvelles interviennent pour régir la suite du mouvement.

§ III. — *Les paramètres physiques.*

Sommaire : Mouvement rapporté à des axes quelconques. — Intégration. — Équation intégrante. — Détermination des paramètres physiques. — Formules. — Application. — Action pouvant donner lieu à des changements d'état physique.

1. *Mouvement rapporté à des axes quelconques.* — Supposons comme précédemment que tous les points d'un système atomique quelconque soient maintenus fixes, à l'exclusion d'un seul d'entre eux, m par exemple, de masse g, que nous regarderons comme un mobile. Appliquons à ce dernier une force extérieure, égale et contraire à l'action totale par laquelle il serait sollicité s'il occupait la position O. Donnons au mobile un déplacement infinitésimal, imprimons-lui une vitesse initiale et abandonnons-le ensuite à lui-même.

Prenant pour axes des coordonnées un système rectangulaire quel-

conque, désignons par x, y, z les coordonnées de l'écart au temps t. Le mouvement aura pour équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{A}x + \mathrm{P}y + \mathrm{R}z, \\ -\dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{P}x + \mathrm{B}y + \mathrm{Q}z, \\ -\dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{R}x + \mathrm{Q}y + \mathrm{C}z. \end{cases}$$

(Ces équations se déduisent immédiatement du groupe (16) de notre premier paragraphe, en y supprimant l'indice m, afin de simplifier les écritures.)

Les paramètres A, B, C, P, Q, R sont déterminés par la configuration géométrique du système donné, dans l'hypothèse où m occupe la position O.

Ils s'expriment au moyen du potentiel Φ, relatif à ce point, par les formules très-simples

$$(2)\qquad \begin{cases} g\mathrm{A} = -\dfrac{d^2\Phi}{d\mathrm{X}^2}, \\ g\mathrm{B} = -\dfrac{d^2\Phi}{d\mathrm{Y}^2}, \\ g\mathrm{C} = -\dfrac{d^2\Phi}{d\mathrm{Z}^2}, \\ g\mathrm{P} = -\dfrac{d^2\Phi}{d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}}, \\ g\mathrm{Q} = -\dfrac{d^2\Phi}{d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z}}, \\ g\mathrm{R} = -\dfrac{d^2\Phi}{d\mathrm{Z}\,d\mathrm{X}}, \end{cases}$$

dans lesquelles X, Y, Z désignent les coordonnées du point O.

Proposons-nous d'intégrer les équations (1).

2. *Intégration des équations différentielles.* — A cet effet, nous rappellerons d'abord que l'équation différentielle

$$(3)\qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -s\varepsilon$$

admet pour intégrale générale une des trois fonctions

$$h\sin t\sqrt{s} + h'\cos t\sqrt{s}, \tag{4}$$

$$he^{t\sqrt{-s}} + h'e^{-t\sqrt{-s}}, \tag{5}$$

$$ht + h', \tag{6}$$

dans lesquelles h et h' sont des constantes arbitraires. On doit choisir la première de ces fonctions si s est positif, la seconde si s est négatif, et la troisième si s est nul.

Désignons cette intégrale générale par le symbole

$$(h, h'), \tag{7}$$

qui met en relief ses deux constantes arbitraires.

Cela posé, les équations (2) seront vérifiées par le système fini

$$\begin{cases} x = (h, h'), \\ y = (k, k'), \\ z = (l, l'), \end{cases} \tag{8}$$

pourvu qu'on choisisse pour valeur de s une racine de l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} A - s & P & R \\ P & B - s & Q \\ R & Q & C - s \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

et que, d'autre part, on assujettisse les six constantes h, h', k, k', l, l' à vérifier les deux systèmes d'équations linéaires

$$\begin{cases} (A - s)h + Pk + Rl = 0, \\ Ph + (B - s)k + Ql = 0, \\ Rh + Qk + (C - s)l = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} (A - s)h' + Pk' + Rl' = 0, \\ Ph' + (B - s)k' + Ql' = 0, \\ Rh' + Qk' + (C - s)l' = 0, \end{cases} \tag{11}$$

qui déterminent quatre de ces constantes au moyen des deux autres.

Une seconde racine s_1 de la même équation (9) donnerait analogiquement un nouveau système

$$(12)\qquad \begin{cases} x = (h_1, h'_1), \\ y = (k_1, k'_1), \\ z = (l_1, l'_1), \end{cases}$$

vérifiant les équations différentielles (1) et contenant deux constantes arbitraires.

La troisième racine s_2 de la même équation (9) donnerait enfin un troisième groupe

$$(13)\qquad \begin{cases} x = (h_2, h'_2), \\ y = (k_2, k'_2), \\ z = (l_2, l'_2), \end{cases}$$

contenant deux constantes arbitraires et formant une nouvelle solution particulière des équations (1).

Le groupe

$$(14)\qquad \begin{cases} x = (h, h') + (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2), \\ y = (k, k') + (k_1, k'_1) + (k_2, k'_2), \\ z = (l, l') + (l_1, l'_1) + (l_2, l'_1), \end{cases}$$

contenant en dernière analyse six constantes arbitraires, résout le problème de l'intégration générale des équations (1). On obtient ainsi les équations finies du mouvement du point m; les six constantes arbitraires se déterminent d'après les conditions initiales du mouvement (déplacement et vitesse au temps zéro).

3. *Équation intégrante.* — L'équation (9), qui nous a servi à opérer l'intégration, mérite une étude particulière.

Son premier membre, représenté par un déterminant symétrique, affecte une forme bien connue dans la théorie des déterminants. On sait, d'après les travaux de Cauchy, Borchardt et Sylvester, que *cette équation admet trois racines réelles.*

Désignons par

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & P & R \\ P & B & Q \\ R & Q & C \end{vmatrix} \tag{15}$$

ce que devient le premier membre de l'équation (9) lorsqu'on y fait $s = 0$.

Nous pourrons mettre cette équation sous la forme

$$s^3 - (A + B + C)s^2 + (P^2 + Q^2 + R^2 - AB - BC - CA)s - \Delta = 0. \tag{16}$$

4. *Détermination des paramètres physiques.* — Si l'on substituait aux axes rectangulaires des coordonnées auxquels sont rapportées les équations (14) (en supposant qu'on ait déterminé les dix-huit constantes h, k, l, etc.), un autre système rectangulaire, les coordonnées x, y, z s'exprimeraient par des fonctions linéaires des nouvelles coordonnées x', y', z'. Opérant la substitution dans le groupe (14) et résolvant ensuite par rapport à x', y', z', on arriverait à un groupe d'équations de même forme.

Il résulte de cette observation que les trois racines de l'équation intégrante (9) sont indépendantes des axes des coordonnées. On peut donc, pour déterminer ces racines, choisir indifféremment tel ou tel système d'axes. Or, si l'on choisit en particulier celui des *axes principaux* relatifs au point O, position primitive de l'atome m, on a, d'une part,

$$P = Q = R = 0, \tag{17}$$

et, d'autre part,

$$\begin{cases} A = H, \\ B = K, \\ C = L, \end{cases} \tag{18}$$

H, K, L désignant les *paramètres physiques* de m.

L'équation (9) prend alors la forme très-simple

$$(s - H)(s - K)(s - L) = 0, \tag{19}$$

et l'on voit ainsi que *l'équation intégrante admet pour racines les trois paramètres physiques*.

Il suffit donc, pour calculer ces paramètres, de former l'équation (9) pour des axes de coordonnées rectangulaires quelconques, et de la résoudre par rapport à s.

Ces trois paramètres sont toujours réels.

Les racines de l'équation intégrante étant indépendantes des axes des coordonnées, il en est de même des coefficients de cette équation, c'est-à-dire des trois fonctions

$$A + B + C,$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 - AB - BC - CA,$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & P & R \\ P & B & Q \\ R & Q & C \end{vmatrix}$$

formées au moyen des six dérivées secondes du potentiel Φ.

3. *Formules.* — Nous avons donné, dans notre premier paragraphe, les expressions générales des A, B, C, P, Q, R. Ces expressions se simplifient si, au lieu de prendre un point quelconque pour origine des coordonnées, on place cette origine au point O, position d'équilibre de l'atome m.

Soit, dans cette hypothèse, g_n la masse d'un autre atome quelconque n, ρ la distance On, (α, β, γ) les coordonnées du point n, et

$$g_m g_n f(\rho)$$

l'action exercée sur n par m, lorsque ce dernier atome est placé en O. On a alors

$$(20)\quad \begin{cases} A = \Sigma_n g_n [\alpha^2 \rho f'(\rho) + (\rho^2 - \alpha^2) f(\rho)] \frac{1}{\rho^4}, \\ B = \Sigma_n g_n [\beta^2 \rho f'(\rho) + (\rho^2 - \beta^2) f(\rho)] \frac{1}{\rho^4}, \\ C = \Sigma_n g_n [\gamma^2 \rho f'(\rho) + (\rho^2 - \gamma^2) f(\rho)] \frac{1}{\rho^4}, \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} P = \Sigma_n g_n [\rho f'(\rho) - f(\rho)] \frac{\alpha\beta}{\rho^3}, \\ Q = \Sigma_n g_n [\rho f'(\rho) - f(\rho)] \frac{\beta\gamma}{\rho^3}, \\ R = \Sigma_n g_n [\rho f'(\rho) - f(\rho)] \frac{\gamma\alpha}{\rho^3}. \end{cases}$$

6. *Application.* — Pour faire une application immédiate de ces formules, supposons qu'on ait

$$(22)\qquad f(\rho) = \pm \rho^a,$$

l'exposant a désignant une quantité réelle, de grandeur et de signe quelconques.

Il vient alors

$$(23)\qquad \begin{cases} A = \pm \Sigma_n g_n \rho^{a+3} [a\alpha^2 + (\rho^2 - \alpha^2)], \\ B = \pm \Sigma_n g_n \rho^{a+3} [a\beta^2 + (\rho^2 - \beta^2)], \\ C = \pm \Sigma_n g_n \rho^{a+3} [a\gamma^2 + (\rho^2 - \gamma^2)], \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} P = \pm (a-1) \Sigma_n g_n \alpha\beta\rho^{a-3}, \\ Q = \pm (a-1) \Sigma_n g_n \beta\gamma\rho^{a-3}, \\ R = \pm (a-1) \Sigma_n g_n \gamma\alpha\rho^{a-3}. \end{cases}$$

1° Supposons d'abord $a > 0$, de manière que *l'action soit proportionnelle à une puissance quelconque de la distance.*

Si cette action est *attractive* (signe + des formules), A, B, C sont toujours *positifs,* quelle que soit la configuration du système atomique, quelles que soient aussi les masses de ses points. Il en est de même des paramètres physiques H, K, L qui sont des valeurs particulières de A, B, C. Par conséquent, il y a toujours *équilibre stable.*

Si l'action est *répulsive* (signe — des formules), les paramètres physiques H, K, L sont négatifs; il y a toujours *équilibre instable.*

2° Supposons maintenant $a > 0$, de manière que *l'action soit inversement proportionnelle à une puissance quelconque de la distance.*

En ajoutant membre à membre les trois formules (23), on trouve

$$(25)\qquad A + B + C = H + K + L = \pm (a+2) \Sigma_n g_n \rho^{a-2}.$$

La somme (H + K + L) prend donc le signe de l'expression

$$\pm (a + 2).$$

Elle est *négative*, soit *si l'action est attractive* (signe +) *et inversement proportionnelle à une puissance inférieure à* 2, soit encore *si cette action est répulsive* (signe —) *et inversement proportionnelle à une puissance supérieure à* 2.

Un au moins des trois paramètres physiques étant alors négatif, *l'équilibre ne peut pas être stable.*

3° Dans le cas particulier où $a = -2$, la somme (H + K + L) est identiquement nulle.

L'action atomique est alors *une attraction ou une répulsion inversement proportionnelle au carré de la distance.*

Les signes + et — apparaissent nécessairement tous les deux dans le groupe des paramètres physiques. *L'équilibre stable est encore impossible.*

7. *Actions pouvant donner lieu à des changements d'état physique.* — Du moment où une hypothèse faite sur l'action à distance exclut la possibilité d'un équilibre stable ou celle d'un équilibre instable dans un système atomique (quelle que soit la figure géométrique de ce système), on doit regarder cette hypothèse comme inadmissible dans les recherches mathématiques sur la constitution des corps naturels, lesquels peuvent passer de l'état solide à l'état gazeux.

Si donc on voulait essayer l'explication des phénomènes physiques en admettant une action à distance comprise dans la forme générale

$$\pm \rho^a,$$

il faudrait, d'après les observations précédentes, rejeter toute hypothèse non comprise dans celle d'une *attraction inversement proportionnelle à une puissance supérieure à* 2 ou dans celle d'une *répulsion inversement proportionnelle à une puissance inférieure à* 2.

D'autres considérations analytiques que nous n'entrevoyons pas permettraient peut-être de restreindre plus encore le champ des hypothèses.

§ IV. — *Efforts engendrés par une déformation infinitésimale.*

Sommaire : Rappel de formules. — Nouvelles notations. — Système d'équations linéaires. — Propriétés du déterminant. — Forme symétrique. — Équations différentielles. — Intégration générale. — Réalité des racines s.

1. *Rappel de formules.* — Reprenant les notations adoptées dans notre premier paragraphe, nous pourrons représenter l'effort total engendré au point m, par suite d'une déformation infinitésimale quelconque du système atomique, par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} u_m = \Sigma_n (X_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} x_{n,m}), \\ v_m = \Sigma_n (Y_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} y_{n,m}), \\ w_m = \Sigma_n (Z_{n,m} F'_{m,n} r_{m,n} + F_{m,n} z_{n,m}), \end{cases}$$

dans lesquelles

$$(2)\qquad \begin{cases} X_{n,m} = X_n - X_m, \\ Y_{n,m} = Y_n - Y_m, \\ Z_{n,m} = Z_n - Z_m, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} x_{n,m} = x_n - x_m, \\ y_{n,m} = y_n - y_m, \\ z_{n,m} = z_n - z_m, \end{cases}$$

$$(4)\qquad r_{m,n} = \frac{X_{n,m}}{R_{m,n}} x_{n,m} + \frac{Y_{n,m}}{R_{m,n}} y_{n,m} + \frac{Z_{n,m}}{R_{m,n}} z_{n,m},$$

$$(5)\qquad R_{m,n} = \sqrt{X^2_{m,n} + Y^2_{m,n} + Z^2_{m,n}},$$

$$(6)\qquad F_{m,n} = \frac{1}{R_{m,n}} g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}).$$

2. *Nouvelles notations.* — Afin de simplifier les écritures qui vont

suivre, nous poserons

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{X^2_{m,n}}{R_{n,m}} F'_{m,n} + F_{m,n} = g_m a_{m,n}, \\ \dfrac{Y^2_{m,n}}{R_{n,m}} F'_{m,n} + F_{m,n} = g_m b_{m,n}, \\ \dfrac{Z^2_{m,n}}{R_{n,m}} F'_{m,n} + F_{m,n} = g_m c_{m,n}, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{X_{n,m} Y_{n,m}}{R_{n,m}} F'_{m,n} = g_m \alpha_{m,n}, \\ \dfrac{Y_{n,m} Z_{n,m}}{R_{n,m}} F'_{m,n} = g_m \beta_{m,n}, \\ \dfrac{Z_{n,m} X_{n,m}}{R_{n,m}} F'_{m,n} = g_m \gamma_{m,n}. \end{cases}$$

Les fonctions que nous avons désignées par les lettres A_m, B_m, C_m et P_m, Q_m, R_m auront pour valeurs

$$(9)\qquad \begin{cases} A_m = \Sigma_n a_{m,n}, \\ B_m = \Sigma_n b_{m,n}, \\ C_m = \Sigma_n c_{m,n}, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} P_m = \Sigma_n \alpha_{m,n}, \\ Q_m = \Sigma_n \beta_{m,n}, \\ R_m = \Sigma_n \gamma_{m,n}. \end{cases}$$

Grâce à ces conventions, le groupe des équations (1) pourra s'écrire

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_m}{g_m} = -A_m x_m + \Sigma_n a_{m,n} x_n - P_m \gamma_m + \Sigma_n \alpha_{m,n} \gamma_n - R_m z_m + \Sigma_n \gamma_{m,n} z_n, \\ \dfrac{v_m}{g_m} = -P_m x_m + \Sigma_n \alpha_{m,n} x_n - B_m \gamma_m + \Sigma_n b_{m,n} \gamma_n - Q_m z_m + \Sigma_n \beta_{m,n} z_n, \\ \dfrac{w_m}{g_m} = -R_m x_m + \Sigma_n \gamma_{m,n} x_n - Q_m \gamma_m + \Sigma_n \beta_{m,n} \gamma_n - C_m z_m + \Sigma_n c_{m,n} z_n. \end{cases}$$

3. *Système d'équations*. — Des équations analogues existent pour chaque point du système atomique. En les écrivant pour tous les

points au nombre de N, on forme le système de 3N équations linéaires :

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\frac{u_1}{g_1} = -A_1x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,N}x_N - P_1y_1 + \alpha_{1,2}y_2 + \ldots + \alpha_{1,N}y_N - R_1z_1 + \gamma_{1,2}z_2 + \ldots + \gamma_{1,2}z_N,\\
\frac{u_2}{g_2} = a_{2,1}x_1 - A_2x_2 + \ldots + a_{2,N}x_N + \alpha_{2,1}y_1 - P_2y_2 + \ldots + \alpha_{2,N}y_N + \gamma_{2,1}z_1 - R_2z_2 + \ldots + \gamma_{2,N}z_N,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{u_N}{g_N} = a_{N,1}x_1 + a_{N,2}x_2 + \ldots - A_Nx_N + \alpha_{N,1}y_1 + \alpha_{N,2}y_2 + \ldots - P_Ny_N + \gamma_{N,1}z_1 + \gamma_{N,2}z_2 + \ldots - R_Nz_N;\\
\frac{v_1}{g_1} = -P_1x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,N}x_N - B_1y_1 + b_{1,2}y_2 + \ldots + b_{1,N}y_N - Q_1z_1 + \beta_{1,2}z_1 + \ldots + \beta_{1,N}z_N,\\
\frac{v_2}{g_2} = \alpha_{2,1}x_1 - P_2x_2 + \ldots + \alpha_{2,N}x_N + b_{2,1}y_1 - B_2y_2 + \ldots + b_{2,N}y_N + \beta_{2,1}z_1 - Q_2z_2 + \ldots + \beta_{2,N}z_N,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{v_N}{g_N} = \alpha_{N,1}x_1 + \alpha_{N,2}x_2 + \ldots - P_Nx_N + b_{N,1}y_1 + b_{N,2}y_2 + \ldots - B_Ny_N + \beta_{N,1}z_1 + \beta_{N,2}z_2 + \ldots - Q_Nz_N;\\
\frac{w_1}{g_1} = -R_1x_1 + \gamma_{1,2}x_2 + \ldots + \gamma_{1,N}x_N - Q_1y_1 + \beta_{1,2}y_2 + \ldots + \beta_{1,N}y_N - C_1z_1 + c_{1,2}z_2 + \ldots + c_{1,N}z_N,\\
\frac{w_2}{g_2} = \gamma_{2,1}x_1 - R_2x_2 + \ldots + \gamma_{2,N}x_N + \beta_{2,1}y_1 - Q_2y_2 + \ldots + \beta_{2,N}y_N + c_{2,1}z_1 - C_2z_2 + \ldots + c_{2,N}z_N,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{w_N}{g_N} = \gamma_{N,1}x_1 + \gamma_{N,2}x_2 + \ldots - R_Nx_N + \beta_{N,1}y_1 + \beta_{N,2}y_2 + \ldots - Q_Ny_N + c_{N,1}z_1 + c_{N,2}z_2 + \ldots - C_Nz_N.
\end{cases}
$$

Les coefficients qui entrent dans les seconds membres de ces équations sont au nombre total de $9N^2$; mais on n'en compte que $6N^2$ distincts.

Il existe, entre ces $6N^2$ coefficients, 6N relations analogues à celles des groupes (9) et (10).

D'autre part, on trouve par les formules (7) et (8), et en vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction, pour deux points quelconques m et n, les relations symétriques

$$
(13)\quad
\begin{cases}
g_m a_{m,n} = g_n a_{n,m}, & g_m b_{m,n} = g_n b_{n,m}, & g_m c_{m,n} = g_n c_{n,m},\\
g_m \alpha_{m,n} = g_n \alpha_{n,m}, & g_m \beta_{m,n} = g_n \beta_{n,m}, & g_m \gamma_{m,n} = g_n \gamma_{n,m}.
\end{cases}
$$

Le nombre de ces relations, lorsqu'on fait varier m et n (indices inégaux) en les prenant de toutes les manières possibles dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

s'élève au total de $3N(N-1)$.

En résumé, il existe entre les $6N^2$ coefficients distincts des équations (12) un système de $3N(N+1)$ équations, permettant de déterminer $3N(N+1)$ de ces coefficients au moyen des $3N(N-1)$ autres.

4. *Propriétés du déterminant.* — Si l'on regardait les premiers membres des équations (12) comme des quantités connues et les projections de tous les déplacements comme des inconnues, on aurait un système de $3N$ équations du premier degré, dont nous désignerons le déterminant par le symbole $\mathfrak{D}$.

Ce déterminant est représenté par le tableau suivant, qui met en relief tous ses éléments :

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
-A_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,N} & -P_1 & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,N} & -R_1 & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,N} \\
a_{2,1} & -A_2 & \ldots & a_{2,N} & \alpha_{2,1} & -P_2 & \ldots & \alpha_{2,N} & \gamma_{2,1} & -R_2 & \ldots & \gamma_{2,N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & -A_N & \alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \ldots & -P_N & \gamma_{N,1} & \gamma_{N,2} & \ldots & -R_N \\
\hline
-P_1 & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,N} & -B_1 & b_{1,2} & \ldots & b_{1,N} & -Q_1 & \beta_{1,2} & \ldots & \beta_{1,N} \\
\alpha_{2,1} & -P_2 & \ldots & \alpha_{2,N} & b_{2,1} & -B_2 & \ldots & b_{2,N} & \beta_{2,1} & -Q_2 & \ldots & \beta_{2,N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{N,1} & \alpha_{N,2} & \ldots & -P_N & b_{N,1} & b_{N,2} & \ldots & -B_N & \beta_{N,1} & \beta_{N,2} & \ldots & -Q_N \\
\hline
-R_1 & \gamma_{1,2} & \ldots & \gamma_{1,N} & -Q_1 & \beta_{1,2} & \ldots & \beta_{1,N} & -C_1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,N} \\
\gamma_{2,1} & -R_2 & \ldots & \gamma_{2,N} & \beta_{2,1} & -Q_2 & \ldots & \beta_{2,N} & c_{2,1} & -C_2 & \ldots & c_{2,N} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\gamma_{N,1} & \gamma_{N,2} & \ldots & -R_N & \beta_{N,1} & \beta_{N,2} & \ldots & -Q_N & c_{N,1} & c_{N,2} & \ldots & -C_N
\end{array}\right|$$

Les lignes à traits interrompus que nous avons figurées divisent ce tableau en neuf cases dans chacune desquelles se trouvent les éléments

d'un *déterminant partiel*. Ces derniers sont au nombre de six distincts; on peut représenter chacun d'eux par la lettre de ronde correspondant à celle qui entre dans les symboles de ses éléments principaux. On a ainsi les signes

$$\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C},\ \mathcal{P},\ \mathcal{Q},\ \mathcal{R},$$

et le déterminant $\mathfrak{D}$ peut s'écrire symboliquement

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{P} & \mathcal{R} \\ \mathcal{P} & \mathcal{B} & \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} & \mathcal{Q} & \mathcal{C} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Il est facile de voir que ce déterminant est nul, ou, en d'autres termes, que le système des équations (12) est indéterminé.

Supposons, en effet, que ces équations soient vérifiées par certaines valeurs des $x_1, x_2, \ldots, x_N$, des $y_1, y_2, \ldots, y_N$ et des $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Elles le seront encore si l'on augmente tous les x d'une quantité arbitraire h, tous les y d'une autre quantité arbitraire k et tous les z d'une autre quantité arbitraire l, car cela revient à imprimer à tout le système atomique, après sa déformation, une simple translation (h, k, l), qui ne peut évidemment modifier ni les intensités ni les directions des efforts.

5. *Forme symétrique.* — Considérons en particulier le déterminant partiel

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} -A_1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & -A_2 & \ldots & a_{2,N} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & -A_N \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Multiplions les éléments de la première ligne horizontale par $\sqrt{g_1}$, ceux de la deuxième par $\sqrt{g_2}, \ldots$, ceux de la $N^{ième}$ et dernière par $\sqrt{g_N}$.

Divisons ensuite les éléments de la première colonne verticale par $\sqrt{g_1}$, ceux de la deuxième par $\sqrt{g_2}$, ..., ceux de la N^{ième} et dernière par $\sqrt{g_N}$.

Nous obtiendrons un nouveau déterminant

$$(16)\qquad \mathfrak{V}' = \begin{vmatrix} -A_1 & \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\,a_{1,2} & \dots & \sqrt{\frac{g_1}{g_N}}\,a_{1,N} \\ \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\,a_{2,1} & -A_2 & \dots & \sqrt{\frac{g_2}{g_N}}\,a_{2,N} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sqrt{\frac{g_N}{g_1}}\,a_{N,1} & \sqrt{\frac{g_N}{g_2}}\,a_{N,2} & \dots & -A_N \end{vmatrix}.$$

Posons

$$(17)\qquad \Gamma = g_1 g_2 \dots g_N.$$

Par suite des multiplications opérées sur ses lignes horizontales le déterminant $\mathfrak{A}$ se trouve évidemment multiplié par Γ. Par suite des divisions opérées sur ses colonnes verticales, ce déterminant se trouve divisé par Γ. En dernière analyse, on n'a pas changé sa valeur; on a donc

$$(18)\qquad \mathfrak{V}' = \mathfrak{A}.$$

Les tableaux (15) et (16) représentent deux manières équivalentes d'écrire le même déterminant; il est à remarquer que dans ces deux manières *les éléments principaux restent les mêmes.*

La forme $\mathfrak{V}'$ est celle d'un déterminant *symétrique*. En effet, deux éléments symétriquement placés étant, généralement, $\sqrt{\frac{g_m}{g_n}}\,a_{m,n}$ et $\sqrt{\frac{g_n}{g_m}}\,a_{n,m}$, l'égalité de ces éléments

$$(19)\qquad \sqrt{\frac{g_m}{g_n}}\,a_{m,n} = \sqrt{\frac{g_n}{g_m}}\,a_{n,m}$$

équivaut à

$$g_m a_{m,n} = g_n a_{n,m}, \tag{20}$$

relation vraie d'après les formules (13).

Les autres déterminants partiels

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R}$$

peuvent être transformés de la même manière en déterminants symétriques

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{G},\ \mathfrak{F},$$

sans qu'il y ait altération des éléments principaux.

Formant avec les déterminants partiels ainsi transformés un assemblage analogue à celui qu'indique la formule (14), nous aurons

$$\mathfrak{E} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{H} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{M} & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{S} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Le déterminant $\mathfrak{E}$ ainsi défini est évidemment *symétrique*. Il a *les mêmes éléments principaux* que le déterminant $\mathfrak{D}$. Nous allons prouver en outre que

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}. \tag{22}$$

En effet, pour obtenir $\mathfrak{E}$, il est nécessaire et suffisant d'opérer sur $\mathfrak{D}$ les opérations suivantes :

1° Multiplier par $\sqrt{g_1}$ les éléments de la 1re, de la $(N+1)^{ième}$ et de la $(2N+1)^{ième}$ ligne horizontale; par $\sqrt{g_2}$ les éléments de la 2e, de la $(N+2)^{ième}$ et de la $(2N+2)^{ième}$ ligne,...; par $\sqrt{g_N}$ les éléments de la $N^{ième}$, de la $2N^{ième}$ et de la $3N^{ième}$ ligne;

2° Diviser par $\sqrt{g_1}$ les éléments de la 1re, de la $(N+1)^{ième}$ et de la

$(2N+1)^{ième}$ colonne verticale; par $\sqrt{g_2}$ les éléments de la 2^e, de la $(N+2)^{ième}$ et de la $(2N+2)^{ième}$ colonne,...; par $\sqrt{g_N}$ les éléments de la $N^{ième}$, de la $2N^{ième}$ et de la $3N^{ième}$ colonne.

Les multiplications par lignes horizontales ont pour résultat de multiplier $\mathfrak{D}$ par le facteur Γ^3; les divisions par colonnes verticales divisent ce déterminant par le même facteur. De cette compensation résulte l'égalité (22) qu'il fallait démontrer.

6. *Équations différentielles.* — Imaginons qu'on applique à l'atome m une force capable d'équilibrer l'action totale par laquelle il se trouve sollicité lorsqu'il occupe sa position primitive. Déplaçons cet atome infiniment peu, imprimons-lui une vitesse initiale quelconque, et abandonnons-le à lui-même.

Supposons qu'on en fasse autant pour tous les autres atomes à un même instant que nous prendrons pour origine du temps t.

Un phénomène de mouvement prendra naissance. Tant que les écarts atomiques resteront infinitésimaux relativement aux distances séparatives, le mouvement sera régi par les équations différentielles linéaires simultanées qu'on obtient, en remplaçant dans les équations (12) les premiers membres,

$$\begin{array}{lll} \dfrac{u_1}{g_1}, & \dfrac{u_2}{g_2}, \ldots, & \dfrac{u_N}{g_N}, \\ \dfrac{v_1}{g_1}, & \dfrac{v_2}{g_2}, \ldots, & \dfrac{v_N}{g_N}, \\ \dfrac{w_1}{g_1}, & \dfrac{w_2}{g_2}, \ldots, & \dfrac{w_N}{g_N}, \end{array}$$

par les dérivées secondes correspondantes :

$$\begin{array}{lll} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, & \dfrac{d^2x_2}{dt^2}, \ldots, & \dfrac{d^2x_N}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2}, & \dfrac{d^2y_2}{dt^2}, \ldots, & \dfrac{d^2y_N}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2}, & \dfrac{d^2z_2}{dt^2}, \ldots, & \dfrac{d^2z_N}{dt^2}. \end{array}$$

Nous écrirons ces équations symboliquement sous la forme

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=(x,y,z)_1, & \dfrac{d^2y_1}{dt^2}=((x,y,z))_1, & \dfrac{d^2z_1}{dt^2}=(((x,y,z)))_1, \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}=(x,y,z)_2, & \dfrac{d^2y_2}{dt^2}=((x,y,z))_2, & \dfrac{d^2z_2}{dt^2}=(((x,y,z)))_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d^2x_N}{dt^2}=(x,y,z)_N, & \dfrac{d^2y_N}{dt^2}=((x,y,z))_N, & \dfrac{d^2z_N}{dt^2}=(((x,y,z)))_N. \end{cases}$$

Il s'agit de les intégrer.

7. *Intégration particulière.* — A cet effet, nous désignerons par le symbole

$$\nu,\ \nu'$$

l'intégrale générale de l'équation

$$(24)\qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=-s\varepsilon,$$

ν et ν' étant les deux constantes arbitraires de cette intégrale, qui peut prendre, comme on sait, trois formes analytiques différentes, suivant que s est positif, nul ou négatif.

Le système (23) admettra l'intégration particulière

$$(25)\quad \begin{cases} x_1=h_1,h'_1, & y_1=k_1,k'_1, & z_1=l_1,l'_1, \\ x_2=h_2,h'_2, & y_2=k_2,k'_2, & z_2=l_2,l'_2, \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots, \\ x_N=h_N,h'_N, & y_N=k_N,k'_N, & z_N=l_N,l'_N, \end{cases}$$

pourvu que, d'une part, on prenne pour valeur de s une racine de l'équation

$$(26)\qquad \mathfrak{D}_s=0,$$

($\mathfrak{D}_s$ désignant ce que devient le déterminant $\mathfrak{D}$ lorsqu'on ajoute s à chacun de ses éléments principaux), et que, d'autre part, on assu-

jettisse les constantes h, k, l, h', k', l' à vérifier les deux systèmes d'équations linéaires :

$$(27)\quad \begin{cases} -sh_1 = (h,k,l)_1, & -sk_1 = ((h,k,l))_1, & -sl_1 = (((h,k,l)))_1, \\ -sh_2 = (h,k,l)_2, & -sk_2 = ((h,k,l))_2, & -sl_2 = (((h,k,l)))_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ -sh_N = (h,k,l)_N, & -sk_N = ((h,k,l))_N, & -sl_N = (((h,k,l)))_N; \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} -sh'_1 = (h',k',l')_1, & -sk'_1 = ((h',k',l'))_1, & -sl'_1 = (((h',k',l')))_1, \\ -sh'_2 = (h',k',l')_2, & -sk'_2 = ((h',k',l'))_2, & -sl'_2 = (((h',k',l')))_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ -sh'_N = (h',k',l')_N, & -sk'_N = ((h',k',l'))_N, & -sl'_N = (((h',k',l')))_N, \end{cases}$$

respectivement déduits du système (23), en remplaçant, d'une part, les lettres x, y, z d'abord par h, k, l, puis par h', k', l'; et, d'autre part, les symboles $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ d'abord par $-sh$, $-sk$, $-sl$, puis par $-sh'$, $-sk'$, $-sl'$.

Les 3N équations linéaires dont se compose le système (27) sont homogènes; l'équation (26) exprime que leur déterminant est nul. Ces équations déterminent donc (3N − 1) constantes au moyen de la $N^{ième}$.

Une observation analogue s'applique au système (28).

Par conséquent le système (25), intégration particulière du système (23), contient, en dernière analyse, *deux constantes arbitraires*.

8. *Intégration générale.* — L'équation (26) étant du degré 3N, admet pour racines 3N valeurs de l'inconnue s.

Chacune de ces valeurs fournit une intégration particulière analogue à (25), et deux groupes conditionnels analogues à (27) et (28) entre les constantes qui se trouvent réduites à deux arbitraires.

La sommation des intégrales particulières donne le système

$$(29)\quad \begin{cases} x_1 = Sh_1, h'_1, & y_1 = Sk_1, k'_1, & z_1 = Sl_1, l'_1, \\ x_2 = Sh_2, h'_2, & y_2 = Sk_1, k'_2, & z_2 = Sl_2, l'_1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x_N = Sh_N, h'_N, & y_N = Sk_N, k'_N, & z_N = Sl_N, l'_N, \end{cases}$$

contenant en dernière analyse 6N *constantes arbitraires* et représentant l'intégration générale du système (23).

Ces 6N constantes arbitraires pourraient se déterminer d'après les conditions initiales du mouvement, lesquelles sont également au nombre de 6N (savoir : les projections des déplacements et des vitesses au temps zéro pour tous les points du système atomique).

9. *Réalité des racines s.* — L'identité (22) entraîne évidemment la suivante :

$$\mathfrak{E}_s = \mathfrak{D}_s, \tag{30}$$

$\mathfrak{E}_s$ désignant ce que devient $\mathfrak{E}$ quant on ajoute s à chacun de ses éléments principaux.

Il en résulte que l'équation (26) peut s'écrire

$$\mathfrak{E}_s = 0. \tag{31}$$

Le premier membre étant alors un déterminant symétrique, il s'ensuit que *toutes les racines de l'équation sont réelles.*

Nous donnerons à ces racines le nom de *paramètres dynamiques* du système matériel.

§ V. — *Les paramètres dynamiques.*

Sommaire : Nullité de trois racines s. — Intégration correspondante. — Interprétation cinématique. — Équation simplifiée. — Cas particulier. — Formule d'analyse. — Considérations générales. — Vibrations calorifiques.

1. *Nullité de trois racines s.* — On reconnaît aisément que le déterminant $\mathfrak{D}_s$ (obtenu en ajoutant s à chacun des éléments principaux du déterminant $\mathfrak{D}$) est divisible par s^3.

Ajoutons à la première colonne verticale les (N — 1) colonnes suivantes, en tenant compte des formules

$$A_m = \Sigma_n a_{m,n},$$
$$P_m = \Sigma_n \alpha_{m,n},$$
$$R_m = \Sigma_n \gamma_{m,n};$$

la nouvelle colonne ainsi obtenue sera composée de termes tous égaux à s.

Ajoutons de même à la $(N+1)^{ième}$ colonne verticale les $(N-1)$ colonnes suivantes, en tenant compte des formules

$$P_m = \Sigma_n \alpha_{m,n},$$
$$B_m = \Sigma_n b_{m,n},$$
$$Q_m = \Sigma_n \beta_{m,n};$$

tous les termes de cette colonne deviendront égaux à s.

Ajoutons enfin à la $(2N+1)^{ième}$ colonne verticale les $(N-1)$ dernières colonnes, en tenant compte des formules

$$R_m = \Sigma_n \gamma_{m,n},$$
$$Q_m = \Sigma_n \beta_{m,n},$$
$$C_m = \Sigma_n c_{m,n};$$

nous rendrons encore tous les termes égaux à s.

$\mathfrak{D}_s$ est donc divisible par s^3, et par conséquent l'équation

$$\mathfrak{D}_s = 0,$$

du degré $3N$, a nécessairement trois racines nulles.

2. *Intégration correspondante.* — Lorsque $s = 0$, l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -s\varepsilon$$

se réduit à

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 0,$$

et admet pour intégrale

$$\varepsilon = \nu t + \nu',$$

ν et ν' étant deux constantes arbitraires.

Par conséquent, les trois racines nulles de l'équation

$$\mathfrak{D}_s = 0 \tag{1}$$

ont pour effet d'introduire dans le second membre de chacune des équations intégrales (29) du paragraphe précédent un binôme linéaire

en t, et de réduire à $3(N-1)$ le nombre des autres termes binômes (exponentiels ou trigonométriques) résultant des autres racines de l'équation (1).

A cette triple racine nulle correspond l'intégration particulière

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = h_1 t + h'_1, & y_1 = k_1 t + k'_1, & z_1 = l_1 t + l'_1, \\ x_2 = h_2 t + h'_2, & y_2 = k_2 t + k'_2, & z_2 = l_2 t + l'_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ x_N = h_N t + h'_N, & y_N = k_N t + k'_N, & z_N = l_N t + l'_N, \end{cases}$$

du système différentiel (23), § IV.

Les constantes h, k, l, au nombre de $3N$, doivent vérifier les équations linéaires homogènes.

$$(3)\qquad \begin{cases} -A_1 h_1 + \alpha_{1,2} h_2 + \dots + \alpha_{1,N} h_N - P_1 k_1 + \alpha_{1,2} k_2 + \dots + \alpha_{1,N} k_N - R_1 l_1 + \gamma_{1,2} l_2 + \dots + \gamma_{1,N} l_N = 0, \\ \alpha_{2,1} h_1 - A_2 h_2 + \dots + \alpha_{2,N} h_N + \alpha_{2,1} k_1 - P_2 k_1 + \dots + \alpha_{2,N} k_N + \gamma_{2,1} l_1 - R_2 l_2 + \dots + \gamma_{2,N} l_N = 0, \\ \dots\dots\dots\

$\mathfrak{D}$ est égal à ce que devient $\mathfrak{D}_s$ pour $s = 0$. Or $\mathfrak{D}_s$ est divisible par s^3; donc $\mathfrak{D}$ est nul au troisième ordre. Il en résulte que les équations (3) se réduisent à $3(N-1)$ distinctes, et qu'il en est de même des équations (4).

En tenant compte des équations

$$(5)\qquad \begin{cases} A_m = \Sigma_n a_{m,n}, \\ B_m = \Sigma_n b_{m,n}, \\ C_m = \Sigma_n c_{m,n}, \\ P_m = \Sigma_n \alpha_{m,n}, \\ Q_m = \Sigma_n \beta_{m,n}, \\ R_m = \Sigma_n \gamma_{m,n}, \end{cases}$$

on voit que le système (3) est satisfait en posant

$$(6)\qquad \begin{cases} h_1 = h_2 = \ldots = h_N, \\ k_1 = k_2 = \ldots = k_N, \\ l_1 = l_2 = \ldots = l_N. \end{cases}$$

Or ce nouveau système se réduit aussi à $3(N-1)$ équations distinctes; il est donc équivalent à (3).

De même, le système (4) est satisfait en posant

$$(7)\qquad \begin{cases} h'_1 = h'_2 = \ldots = h'_N, \\ k'_1 = k'_2 = \ldots = k'_N, \\ l'_1 = l'_2 = \ldots = l'_N. \end{cases}$$

Ce nouveau système, se réduisant à $3(N-1)$ équations distinctes, est équivalent à (4).

D'après cela, l'intégration particulière (2) se réduit à la forme très-simple

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = x_2 = \ldots = x_N = ht + h', \\ y_1 = y_2 = \ldots = y_N = kt + k', \\ z_1 = z_2 = \ldots = z_N = lt + l', \end{cases}$$

qui met en évidence les six constantes arbitraires h, k, l, h', k', l'.

Interprétation cinématique. — Les paramètres h, k, l sont évidemment les trois projections de la vitesse d'un mouvement rectiligne et uniforme qui vient animer tous les atomes du système.

Les vitesses initiales simultanément imprimées par hypothèse à ces divers atomes peuvent être regardées comme résultant d'impulsions égales en durée, mais différentes en grandeur et en direction. Transportons par la pensée toutes ces impulsions au centre de gravité du système atomique et composons-les afin d'obtenir leur résultante. Si l'on regardait ce centre de gravité comme un point matériel libre sur lequel serait condensée la masse totale du système (ou, en d'autres termes, la somme des masses atomiques), l'impulsion résultante dont nous parlons lui communiquerait une vitesse déterminée en grandeur et en direction. Cette vitesse doit évidemment être identique avec celles que représentent les trois projections h, k, l.

D'après cela, soient η_m, $\varkappa_m$, λ_m les trois projections de la vitesse initiale de l'atome m dont la masse est g_m; nous aurons

$$(9)\qquad \begin{cases} h = \dfrac{\mathrm{S}_m g_m \eta_m}{\mathrm{S}_m g_m}, \\ k = \dfrac{\mathrm{S}_m g_m \varkappa_m}{\mathrm{S}_m g_m}, \\ l = \dfrac{\mathrm{S}_m g_m \lambda_m}{\mathrm{S}_m g_m}. \end{cases}$$

Analoguement, en désignant par η'_m, $\varkappa'_m$, λ'_m les trois projections du déplacement initial de l'atome m, on aurait

$$(10)\qquad \begin{cases} h' = \dfrac{\mathrm{S}_m g_m \eta'_m}{\mathrm{S}_m g_m}, \\ k' = \dfrac{\mathrm{S}_m g_m \varkappa'_m}{\mathrm{S}_m g_m}, \\ l' = \dfrac{\mathrm{S}_m g_m \lambda'_m}{\mathrm{S}_m g_m}, \end{cases}$$

en sorte que h', k', l' sont les projections du déplacement initial subi par le centre de gravité du système atomique.

4. *Équation simplifiée.* — En dépouillant l'équation (1) de ses trois

racines nulles, on a

$$\frac{1}{s^3}\mathfrak{D}_s = 0, \tag{11}$$

équation du degré $3(N-1)$ qui détermine $3(N-1)$ *paramètres dynamiques*, positifs ou négatifs.

Développée suivant les puissances croissantes de s, cette équation peut s'écrire

$$s\Sigma\delta_{3N-3} + s^2\Sigma\delta_{3N-4} + \ldots + s^{3N-4}\Sigma\delta_1 + s^{3N-1} = 0, \tag{12}$$

le symbole δ_p désignant un déterminant partiel du degré p, formé au moyen de $\mathfrak{D}$, de façon que sa diagonale soit composée d'éléments appartenant à la diagonale de $\mathfrak{D}$, et $\Sigma\delta_p$ désignant la somme de tous les éléments partiels de ce genre, au nombre de

$$\frac{3N(3N-1)\ldots(3N-p+1)}{1.2\ldots p},$$

qui peuvent se déduire de $\mathfrak{D}$.

Si l'on changeait d'une manière quelconque les axes rectangulaires auxquels se rapportent les coordonnées atomiques, les équations intégrales du mouvement, représentées symboliquement par le groupe (29) du § IV, conserveraient leur forme analytique; les paramètres exponentiels ou trigonométriques qui figurent dans ces équations resteraient les mêmes. Par conséquent, *les paramètres dynamiques sont indépendants des axes des coordonnées*.

Il en résulte que les coefficients des diverses puissances de s dans l'équation (12) sont aussi indépendants des axes. Il en est de même des trois expressions identiquement nulles

$$\mathfrak{D}, \quad \Sigma\delta_{3N-1} \quad \text{et} \quad \Sigma\delta_{3N-2},$$

qui représenteraient, dans l'équation non simplifiée

$$\mathfrak{D}_s = 0,$$

le terme constant, le coefficient de s et celui de s^2.

5. *Cas particulier.* — Parmi toutes les hypothèses qu'il est possible de faire au sujet des fonctions

$$f_{m,n}(R_{m,n})$$

qui représentent les actions à distance, il en est une qui conduit à des calculs remarquablement simples, et c'est à ce titre que nous allons l'examiner. Posons

$$f_{m,n}(R_{m,n}) = KR_{m,n}, \tag{13}$$

ce qui revient à supposer *l'action atomique proportionnelle à la simple distance.*

Nous aurons

$$\begin{cases} F_{m,n} = Kg_m g_n, \\ F'_{m,n} = 0, \\ a_{m,n} = b_{m,n} = c_{m,n} = Kg_n, \\ \alpha_{m,n} = \beta_{m,n} = \gamma_{m,n} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Posant

$$G = S_m g_m,$$

de façon que G désigne la somme des masses atomiques, nous pourrons écrire

$$\begin{cases} A_m = B_m = C_m = K(G - g_m), \\ P_m = Q_m = R_m = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Désignons enfin par (α, β, γ) les trois projections du déplacement infinitésimal subi au temps t par le centre de gravité du système atomique, nous aurons

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{S_m g_m x_m}{G}, \\ \beta = \dfrac{S_m g_m y_m}{G}, \\ \gamma = \dfrac{S_m g_m z_m}{G}. \end{cases} \tag{16}$$

Au moyen de ces notations, les équations différentielles du mouve-

ment revêtiront la forme très-simple

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \mathrm{KG}(\alpha - x_1), & \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \mathrm{KG}(\alpha - x_2), \ldots, & \dfrac{d^2x_N}{dt^2} = \mathrm{KG}(\alpha - x_N), \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \mathrm{KG}(\beta - y_1), & \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = \mathrm{KG}(\beta - y_2), \ldots, & \dfrac{d^2y_N}{dt^2} = \mathrm{KG}(\beta - y_N), \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \mathrm{KG}(\gamma - z_1), & \dfrac{d^2z_2}{dt^2} = \mathrm{KG}(\gamma - z_2), \ldots, & \dfrac{d^2z_N}{dt^2} = \mathrm{KG}(\gamma - z_N). \end{cases}$$

Soient a_m, b_m, c_m les trois projections de la vitesse initiale de l'atome m, a'_m, b'_m, c'_m celles du déplacement initial de ce même point matériel, et supposons qu'on ait

$$(18)\qquad \mathrm{S}_m g_m a_m = \mathrm{S}_m g_m b_m = \mathrm{S}_m g_m c_m = 0,$$

$$(19)\qquad \mathrm{S}_m g_m a'_m = \mathrm{S}_m g_m b'_m = \mathrm{S}_m g_m c'_m = 0.$$

Le centre de gravité du système atomique n'éprouvera aucun dérangement initial et ne sera sollicité par aucune impulsion primitive. On aura donc constamment

$$(20)\qquad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

en sorte que les équations (17) deviendront séparément intégrables.

Si K est positif, on trouve pour l'atome m les équations finies

$$(21)\quad \begin{cases} x_m = \dfrac{a_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}} \sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + a'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}, \\ y_m = \dfrac{b_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}} \sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + b'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}, \\ z_m = \dfrac{c_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}} \sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + c'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}. \end{cases}$$

Si K est négatif, on trouve pour équations finies du mouvement de ce même atome :

$$(22)\quad \begin{cases} x_m = \left(\dfrac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + a'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\dfrac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - a'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}}, \\ y_m = \left(\dfrac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + b'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\dfrac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - b'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}}, \\ z_m = \left(\dfrac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + c'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\dfrac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - c'_m\right) e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}}. \end{cases}$$

Les autres points donnent lieu à des équations analogues.

La forme (21), qui correspond à $K > 0$, figure un état vibratoire de période $\frac{2\pi}{\sqrt{KG}}$. Il y a pour ainsi dire *solidité* en chaque point du système.

La forme (22), qui correspond à $K < 0$, figure un état de mouvement dont la vitesse croît indéfiniment. Les atomes fuient leurs positions primitives. Il y a pour ainsi dire *gazéité* en chaque point.

Si l'on avait généralement

$$\frac{a'_m}{a_m} = \frac{b'_m}{b_m} = \frac{c'_m}{c_m}, \tag{23}$$

c'est-à-dire si les impulsions initiales tombaient sur les mêmes droites que les déplacements, les trajectoires seraient rectilignes.

Examinons maintenant le cas le plus général où les déplacements et les vitesses au temps zéro ne satisferaient à aucune équation conditionnelle.

Nous pourrons représenter les trois projections de la vitesse initiale au point m par $a_m + h$, $b_m + k$, $c_m + l$, h, k, l étant trois quantités arbitraires (les mêmes pour tous les atomes), et les a_m, b_m, c_m étant supposés satisfaire aux équations (18). Représentons de même les trois projections du déplacement initial en m par $a'_m + h'$, $b'_m + k$, $c'_m + l'$, h', k', l' étant trois paramètres quelconques (les mêmes pour tous les atomes), et les a'_m, b'_m, c'_m étant supposés satisfaire aux équations (19).

Il est clair que le mouvement du centre de gravité du système atomique sera représenté par les formules

$$\begin{cases} \alpha = ht + h', \\ \beta = kt + k', \\ \gamma = lt + l', \end{cases} \tag{24}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0. \tag{25}$$

Les équations (17) pourront alors s'écrire

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{d^2(x_1-\alpha)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(x_1-\alpha), \ \frac{d^2(y_1-\beta)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(y_1-\beta), \ \frac{d^2(z_1-\gamma)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(z_1-\gamma), \\ \frac{d^2(x_2-\alpha)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(x_2-\alpha), \ \frac{d^2(y_2-\beta)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(y_2-\beta), \ \frac{d^2(z_2-\gamma)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(z_2-\gamma), \\ \dots\dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots\dots, \\ \frac{d^2(x_N-\alpha)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(x_N-\alpha), \ \frac{d^2(y_N-\beta)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(y_N-\beta), \ \frac{d^2(z_N-\gamma)}{dt^2} = -\mathrm{KG}(z_N-\gamma). \end{cases}$$

Elles peuvent encore s'intégrer séparément au moyen d'un simple changement de variables. On trouve ainsi, en tenant compte des équations (24), pour le mouvement au point m :

1° Si $\mathrm{K} > 0$,

$$(27)\quad \begin{cases} x_m = ht + h' + \frac{a_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}}\sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + a'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}, \\ y_m = kt + k' + \frac{b_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}}\sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + b'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}, \\ z_m = lt + l' + \frac{c_m}{\sqrt{\mathrm{KG}}}\sin t\sqrt{\mathrm{KG}} + c'_m \cos t\sqrt{\mathrm{KG}}; \end{cases}$$

2° Si $\mathrm{K} < 0$,

$$(28)\quad \begin{cases} x_m = ht + h' + \left(\frac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + a'_m\right)e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\frac{a_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - a'_m\right)e^{-t\sqrt{-\mathrm{KG}}}, \\ y_m = kt + k' + \left(\frac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + b'_m\right)e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\frac{b_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - b'_m\right)e^{-t\sqrt{-\mathrm{KG}}}, \\ z_m = lt + l' + \left(\frac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} + c'_m\right)e^{t\sqrt{-\mathrm{KG}}} - \left(\frac{c_m}{\sqrt{-\mathrm{KG}}} - c'_m\right)e^{-t\sqrt{-\mathrm{KG}}}; \end{cases}$$

et de même pour les autres atomes.

Nous rencontrons ici les binômes algébriques et linéaires dont la présence est due aux trois racines nulles de l'équation en s. Les binômes trigonométriques ou exponentiels sont dus aux autres racines de cette équation; or ces binômes ne contiennent, comme base transcendante, que la seule expression KG; les racines dont il s'agit sont donc toutes égales entre elles et admettent KG pour valeur commune.

Ces observations montrent que l'équation générale

$$\mathfrak{D}_s = 0$$

se réduirait, dans le cas actuel, à la forme très-simple

$$s^3(s - \mathrm{KG})^{3(\mathrm{N}-1)} = 0. \tag{29}$$

6. *Formule d'analyse.* — De ce résultat découle une formule d'analyse que nous croyons nouvelle, et qui pourrait trouver quelques applications dans la théorie des nombres. Représentons par

$$g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots, g_{\mathrm{N}}$$

des quantités quelconques. Désignons leur somme par G, et posons pour toute valeur de l'indice m

$$\mathrm{G} - g_m = \mathrm{G}_m. \tag{30}$$

Formons le déterminant d'ordre N :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\mathrm{G}_1 + \varepsilon & g_2 & \ldots & g_m & \ldots & g_{\mathrm{N}} \\ g_1 & -\mathrm{G}_2 + \varepsilon & \ldots & g_m & \ldots & g_{\mathrm{N}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ g_1 & g_2 & \ldots & -\mathrm{G}_m + \varepsilon & \ldots & g_{\mathrm{N}} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ g_1 & g_2 & \ldots & g_m & \ldots & -\mathrm{G}_{\mathrm{N}} + \varepsilon \end{vmatrix}, \tag{31}$$

dans lequel ε désigne un paramètre arbitraire. Nous aurons

$$\Delta = \varepsilon(\varepsilon - \mathrm{G})^{\mathrm{N}-1}. \tag{32}$$

7. *Considérations générales.* — Revenons maintenant à notre théorie générale, et abandonnons toute hypothèse sur la nature des actions à distance.

En séparant dans l'intégration générale représentée par le groupe (29) du § IV les binômes algébriques (correspondant aux trois racines nulles

de l'équation en s), des binômes transcendants qui correspondent aux autres racines, on obtient le groupe symbolique

$$(33)\quad\begin{cases} x_1 = ht + h' + \mathrm{S}h_1, h'_1, & y_1 = kt + k' + \mathrm{S}k_1, k'_1, & z_1 = lt + l' + \mathrm{S}l_1, l'_1, \\ x_2 = ht + h' + \mathrm{S}h_2, h'_2, & y_2 = kt + k' + \mathrm{S}k_2, k'_2, & z_2 = lt + l' + \mathrm{S}l_2, l'_2, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ x_N = ht + h' + \mathrm{S}h_N, h'_N, & y_N = kt + k' + \mathrm{S}k_N, k'_N, & z_N = lt + l' + \mathrm{S}l_N, l'_N. \end{cases}$$

Le signe S indique la sommation de $3(N-1)$ binômes, trigonométriques ou exponentiels, correspondant aux diverses valeurs positives et négatives de s.

Les binômes algébriques définissent un mouvement rectiligne et uniforme commun à tous les atomes, en sorte qu'il y a translation générale du système. Ce mouvement d'ensemble se compose pour chaque mobile avec le mouvement spécial qui résulte de la somme des autres binômes. C'est seulement ce dernier qu'il est intéressant de mettre à l'étude.

Si tous les paramètres dynamiques sont *positifs*, le mouvement spécial de chaque atome résulte évidemment de la composition d'autant de mouvements élémentaires *périodiques* qu'il y a de paramètres distincts. La trajectoire reste infinitésimale; son rayon vecteur ne dépasse jamais un maximum assignable. Le mobile circule dans tous les sens autour de sa position primitive qui semble le solliciter comme un foyer d'attraction. On peut dire qu'il y a *solidité* en chaque point du système.

Si tous les paramètres dynamiques sont *négatifs*, le mouvement spécial de chaque atome résulte de la composition d'autant de mouvements élémentaires non périodiques qu'il y a de paramètres distincts. La trajectoire acquiert une branche infinie ; son rayon vecteur croît sans limite. Dès que ce rayon devient comparable aux distances atomiques, des lois nouvelles interviennent pour régir la suite du mouvement. Le mobile fuit sa position primitive, qui semble le repousser. Il y a *gazéité* en chaque point du système.

Si les paramètres dynamiques sont *partie positifs et partie négatifs*, l'état du système atomique rappelle celui d'une *vapeur*.

Si tous ces paramètres avaient *de très-faibles valeurs positives*, on obtiendrait un état *quasi liquide*.

On comprend aussi qu'il puisse exister aux divers points du système des états physiques différents. Si, par exemple, quelques paramètres dynamiques étaient négatifs, il pourrait arriver, pour certains atomes, que les coefficients des binômes exponentiels correspondants fussent identiquement nuls; l'état solide existerait alors en ces points, tandis que l'état de vapeur se produirait pour les autres. Mais on voit aussi qu'un tel phénomène est accidentel, éphémère, comme doit l'être, en physique, tout phénomène de transition.

Ainsi se trouvent complétées, élucidées, corroborées, les considérations relatives à la constitution physique et au changement d'état des corps que nous avons exposées au § **2**.

8. *Vibrations calorifiques*. — Considérons un corps solide dans un état constant de température; l'action calorifique peut être regardée comme engendrant sur chaque atome une force constante en grandeur et en direction. Les positions dans lesquelles les atomes pourraient rester en équilibre dépendent de ces forces, et c'est ainsi qu'elles influent sur le volume du solide. Mais aucun atome n'occupe en réalité sa position moyenne; l'influence des paramètres dynamiques se manifeste par le développement de mouvements quasi vibratoires, résultant chacun, comme nous l'avons vu, de la composition d'une série de mouvements périodiques.

On voit ainsi comment la théorie générale que nous venons d'exposer pourra se prêter à l'analyse rigoureuse des phénomènes de la chaleur. C'est un sujet que nous nous proposons d'approfondir dans la suite de cette étude.

§ VI. — *Détermination des paramètres dynamiques au moyen des potentiels.*

SOMMAIRE : Équations aux potentiels. — Équivalence analytique. — Déterminant fonctionnel. — Forme Hessienne de ce déterminant. — Équation intégrante. — Forme Hessienne de cette équation. — Résumé.

1. *Équations aux potentiels.* — Un système atomique fixe est analytiquement défini d'une façon complète, lorsqu'on connaît, pour chaque atome composant m, les trois coordonnées rectangulaires X_m, Y_m, Z_m et le potentiel Φ_m.

Les trois composantes U_m, V_m, W_m de l'action totale au point m s'expriment alors par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} U_m = \dfrac{d\Phi_m}{dX_m}, \\ V_m = \dfrac{d\Phi_m}{dY_m}, \\ W_m = \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m}. \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer en m une force extérieure égale et contraire à cette action totale pour obtenir l'équilibre de cet atome.

Le potentiel Φ_m n'est pas seulement une fonction des coordonnées X_m, Y_m, Z_m de l'atome auquel il est relatif; il dépend aussi des coordonnées X_n, Y_n, Z_n de tout autre atome n du système.

Pour une déformation infinitésimale quelconque, les coordonnées du point m éprouvent des variations

$$(2)\qquad \begin{cases} x_m = \delta X_m, \\ y_m = \delta Y_m, \\ z_m = \delta Z_m; \end{cases}$$

celles d'un autre atome, n par exemple, éprouvent également des variations

$$(3)\qquad \begin{cases} x_n = \delta X_n, \\ y_n = \delta Y_n, \\ z_n = \delta Z_n; \end{cases}$$

de même les trois composantes de l'action totale en m éprouvent des variations déterminées

$$(4)\qquad \begin{cases} u_m = \delta \mathrm{U}_m, \\ v_m = \delta \mathrm{V}_m, \\ w_m = \delta \mathrm{W}_m. \end{cases}$$

Ces trois dernières variations sont les composantes de l'*effort* engendré en m par la déformation du système atomique.

En tenant compte des formules (1), on peut écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}_m = \delta \dfrac{d\Phi_m}{d\mathrm{X}_m}, \\ \mathrm{V}_m = \delta \dfrac{d\Phi_m}{d\mathrm{Y}_m}, \\ \mathrm{W}_m = \delta \dfrac{d\Phi_m}{d\mathrm{Z}_m}, \end{cases}$$

équations dont les seconds membres sont évidemment des fonctions linéaires et homogènes de

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{\mathrm{N}},\quad y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{\mathrm{N}},\quad z_1,\ z_2,\ldots,\ z_{\mathrm{N}}.$$

Ainsi développé, chacun des seconds membres comprend $3\mathrm{N}$ termes, N étant le nombre total des points du système.

Formons, pour tous les atomes, les équations analogues à (5), en développant leurs seconds membres, et supposons qu'on écrive ces équations les unes au-dessous des autres, de façon que leurs premiers membres occupent l'ordre suivant

$$(6)\qquad u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{\mathrm{N}},\ v_1,\ v_2,\ldots,\ v_{\mathrm{N}},\ w_1,\ w_2,\ldots,\ w_{\mathrm{N}}.$$

Le symbole (6) pourra représenter ce groupe d'équations et nous servira à le désigner.

Si l'on regardait les premiers membres de ces $3\mathrm{N}$ équations comme

des quantités connues, on aurait un système linéaire, dont nous désignerons le déterminant par $\mathfrak{D}'$.

2. *Équivalence analytique.* — On pourrait déduire le groupe (6) du groupe des équations (12) du § IV en multipliant respectivement ces dernières équations, dans l'ordre où elles se présentent, par les masses

$$g_1, g_2, \dots, g_N, \quad g_1, g_2, \dots, g_N, \quad g_1, g_2, \dots, g_N,$$

dont nous représentons le produit par Γ^3.

Par conséquent, l'équivalence analytique est complète entre le groupe (6) du présent paragraphe et le groupe (12) du § IV. Le symbole $\mathfrak{D}$ désignant le déterminant de ce dernier groupe d'équations, on a évidemment

$$\mathfrak{D}' = \Gamma^3 \mathfrak{D}. \tag{7}$$

Comme $\mathfrak{D}$ est identiquement nul, il en est de même de $\mathfrak{D}'$.

En identifiant les coefficients des équations (6) avec ceux des équations (12), § IV, modifiées par les multiplications indiquées ci-dessus, on trouverait pour toute valeur de m

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_m}{dX_m^2} = -g_m A_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dY_m^2} = -g_m B_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dZ_m^2} = -g_m C_m, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_m}{dX_m\,dY_m} = \dfrac{d^2\Phi_m}{dY_m\,dX_m} = -g_m P_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dY_m\,dZ_m} = \dfrac{d^2\Phi_m}{dZ_m\,dY_m} = -g_m Q_m, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{dZ_m\,dX_m} = \dfrac{d^2\Phi_m}{dX_m\,dZ_m} = -g_m R_m, \end{cases} \tag{9}$$

équations déjà indiquées au § I.

On trouverait encore pour toute combinaison de valeurs distinctes

des indices m et n

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{X}_m d\mathrm{X}_n} = g_m a_{m,n}, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{Y}_m d\mathrm{Y}_n} = g_m b_{m,n}, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{Z}_m d\mathrm{Z}_n} = g_m c_{m,n}, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{X}_m d\mathrm{Y}_n} = \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{Y}_m d\mathrm{X}_n} = g_m \alpha_{m,n}, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{Y}_m d\mathrm{Z}_n} = \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{Z}_m d\mathrm{Y}_m} = g_m \beta_{m,n}, \\ \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{Z}_m d\mathrm{X}_n} = \dfrac{d^2\Phi_m}{d\mathrm{X}_m d\mathrm{Z}_m} = g_m \gamma_{m,n}. \end{cases}$$

Les éléments de $\mathfrak{D}'$ s'expriment ainsi très-simplement au moyen des éléments correspondants de $\mathfrak{D}$.

Les relations connues

$$(12)\qquad \begin{cases} g_m a_{m,n} = g_n a_{n,m}, & g_m b_{m,n} = g_n b_{n,m}, & g_m c_{m,n} = g_n c_{n,m}, \\ g_m \alpha_{m,n} = g_n \alpha_{n,m}, & g_m \beta_{m,n} = g_n \beta_{n,m}, & g_m \gamma_{m,n} = g_n \gamma_{n,m} \end{cases}$$

montrent que $\mathfrak{D}'$ est un *déterminant symétrique*.

3. *Déterminant fonctionnel.* — Celle des équations (6) dont le premier membre est u_m (ou, en d'autres termes, la $m^{ième}$ de ces équations) a pour coefficients, dans son second membre, les dérivées de la fonction $\dfrac{d\Phi_m}{d\mathrm{X}_m}$ relativement à toutes les coordonnées

$$(13)\qquad \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ldots,\ \mathrm{X}_\mathrm{N},\quad \mathrm{Y}_1,\ \mathrm{Y}_2,\ldots,\ \mathrm{Y}_\mathrm{N},\quad \mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2,\ldots,\ \mathrm{Z}_\mathrm{N}.$$

La $(\mathrm{N}+m)^{ième}$ de ces équations (dont le premier membre est v_m) a pour coefficients les dérivées de la fonction $\dfrac{d\Phi_m}{d\mathrm{Y}_m}$ relativement aux mêmes variables.

On trouve de même dans la $(2\mathrm{N}+m)^{ième}$ équation (dont le premier membre est w_m) les dérivées de la fonction $\dfrac{d\Phi_m}{d\mathrm{Z}_m}$.

Ces observations s'appliquant à toute valeur de l'indice m, pris dans la série

$$1, 2, 3, \ldots, N,$$

on voit que $\mathfrak{D}'$ est le *déterminant fonctionnel* du système

$$(14)\quad \frac{d\Phi_1}{dX_1}, \frac{d\Phi_2}{dX_2}, \ldots, \frac{d\Phi_N}{dX_N}, \quad \frac{d\Phi_1}{dY_1}, \frac{d\Phi_2}{dY_2}, \ldots, \frac{d\Phi_N}{dY_N}, \quad \frac{d\Phi_1}{dZ_1}, \frac{d\Phi_2}{dZ_2}, \ldots, \frac{d\Phi_N}{dZ_N},$$

composé d'une suite de fonctions des variables (13).

Ces fonctions doivent vérifier les équations connues

$$(15)\quad \begin{cases} S_m \dfrac{d\Phi_m}{dX_m} = U_m = 0, \\ S_m \dfrac{d\Phi_m}{dY_m} = V_m = 0, \\ S_m \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m} = W_m = 0. \end{cases}$$

Elles ne sont donc pas indépendantes les unes des autres. On en peut conclure que $\mathfrak{D}'$ est identiquement nul. C'est ce que nous avons déjà démontré par une autre méthode.

4. *Forme Hessienne.* — Le potentiel Φ est déterminé par la formule

$$(16)\quad \Phi_m = -\Sigma_n \int g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n})\, dR_{m,n}.$$

On en déduit, d'une part,

$$(17)\quad \frac{d\Phi_m}{dX_m} = -\Sigma_n g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) \frac{dR_{m,n}}{dX_m},$$

et, d'autre part,

$$(18)\quad \frac{d\Phi_m}{dX_n} = -g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n}) \frac{dR_{m,n}}{dX_n}.$$

En permutant les indices m et n dans cette dernière formule, on trouve

$$(19)\quad \frac{d\Phi_n}{dX_m} = -g_n g_m f_{n,m}(R_{n,m}) \frac{dR_{n,m}}{dX_m},$$

relation qu'on peut encore écrire

$$\frac{d\Phi_n}{dX_m} = -\,g_m g_n f_{m,n}(R_{m,n})\frac{dR_{m,n}}{dX_m}. \tag{20}$$

Les formules (17) et (20) conduisent à poser

$$\frac{d\Phi_m}{dX_m} = \sum_n \frac{d\Phi_n}{dX_m}. \tag{21}$$

Soit

$$\mathbf{P} = \tfrac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_N) \tag{22}$$

la demi-somme des potentiels de tous les atomes du système donné.

Nous aurons

$$\sum_n \frac{d\Phi_n}{dX_m} = 2\frac{d\mathbf{P}}{dX_m} - \frac{d\Phi_m}{dX_m}, \tag{23}$$

et nous trouverons par les équations (21) et (23) la formule très-simple

$$\frac{d\Phi_m}{dX_m} = \frac{d\mathbf{P}}{dX_m}, \tag{24}$$

qui a lieu quel que soit m.

Cette formule en X a évidemment ses analogues en Y et Z; de là le groupe

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi_m}{dX_m} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dX_m}, \\ \dfrac{d\Phi_m}{dY_m} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dY_m}, \\ \dfrac{d\Phi_m}{dZ_m} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dZ_m}. \end{cases} \tag{25}$$

D'après cela, la suite des fonctions (14) peut s'écrire

$$\frac{d\mathbf{P}}{dX_1}, \frac{d\mathbf{P}}{dX_2}, \ldots, \frac{d\mathbf{P}}{dX_N}, \frac{d\mathbf{P}}{dY_1}, \frac{d\mathbf{P}}{dY_2}, \ldots, \frac{d\mathbf{P}}{dY_N}, \frac{d\mathbf{P}}{dZ_1}, \frac{d\mathbf{P}}{dZ_2}, \ldots, \frac{d\mathbf{P}}{dZ_N}, \tag{26}$$

et l'on voit que *le déterminant* $\mathfrak{D}'$ *est l'Hessien de la demi-somme* $\mathbf{P}$

des potentiels de tous les atomes, considérée comme fonction des coordonnées primitives

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_N,\quad Y_1,\ Y_2,\ldots,\ Y_N,\quad Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_N$$

de ces atomes.

5. *Équation intégrante.* — Revenons au groupe des équations (6), définies au début de ce paragraphe. Remplaçons respectivement les premiers membres

$$u_1,\ u_2,\ldots,\ u_N,\quad v_1,\ v_2,\ldots,\ v_N,\quad w_1,\ w_2,\ldots,\ w_N$$

par

$$-sg_1x_1,\ -sg_2x_2,\ldots,\ -sg_Nx_N,\quad -sg_1y_1,\ -sg_2y_2,\ldots,\ -sg_Ny_N,$$
$$-sg_1z_1,\ -sg_2z_2,\ldots,\ -sg_Nz_N.$$

Faisons ensuite passer les premiers membres dans les seconds en réunissant les termes semblables.

Nous aurons un système de 3N équations linéaires et homogènes, dont nous désignerons le *résultant* par $\mathfrak{D}'_s$.

Ce résultant pourrait se déduire de celui que nous avons précédemment désigné par $\mathfrak{D}_s$, en multipliant la $1^{ière}$, la $(N+1)^{ième}$ et la $(2N+1)^{ième}$ ligne horizontale de ce dernier par g_1; sa $2^{ième}$, sa $(N+2)^{ième}$ et sa $(2N+2)^{ième}$ ligne par g_2; ...; sa $N^{ième}$, sa $2N^{ième}$ et sa $3N^{ième}$ ligne par g_N.

On a donc identiquement

$$\mathfrak{D}'_s = \Gamma^3 \mathfrak{D}_s; \tag{27}$$

en sorte que l'équation du degré 3N

$$\mathfrak{D}_s = 0, \tag{28}$$

qui nous a permis d'intégrer les équations différentielles des mouvements simultanés, peut aussi s'écrire

$$\mathfrak{D}'_s = 0. \tag{29}$$

6. *Forme Hessienne.*— Représentons par

$$\rho_m = \sqrt{(X_m - X)^2 + (Y_m - Y)^2 + (Z_m - Z)^2} \tag{30}$$

le rayon vecteur qui va d'un point fixe (X, Y, Z) de l'espace à l'atome quelconque m, et soit

$$\mathbf{M} = \tfrac{1}{2}(g_1\rho_1^2 + g_2\rho_2^2 + \ldots + g_N\rho_N^2) \tag{31}$$

la moitié du *moment d'inertie polaire* du système atomique, relativement au point fixe considéré.

On voit aisément que

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dX_m^2} = \frac{d^2\mathbf{M}}{dY_m^2} = \frac{d^2\mathbf{M}}{dZ_m^2} = g_m,$$

et que la dérivée seconde de **M**, relative à une combinaison quelconque de deux variables distinctes prises dans la série

$$X_1, X_2, \ldots, X_N, \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, \quad Z_1, Z_2, \ldots, Z_N,$$

est identiquement nulle.

Il est clair, d'après cela, que l'Hessien de la fonction

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{P} + s\mathbf{M} \tag{32}$$

peut se déduire de l'Hessien $\mathfrak{D}'$ de la fonction **P**, en ajoutant respectivement aux 3N éléments principaux de ce dernier déterminant les quantités

$$sg_1, sg_2, \ldots, sg_N, \quad sg_1, sg_2, \ldots, sg_N, \quad sg_1, sg_2, \ldots, sg_N.$$

Ce sont précisément les opérations qu'il faut effectuer sur $\mathfrak{D}'$ pour obtenir le résultant que nous avons désigné par $\mathfrak{D}'_s$. Donc ce dernier déterminant est l'Hessien de la fonction $\mathbf{P}_s$.

Par conséquent *on peut déterminer les paramètres dynamiques en égalant à zéro l'Hessien de la fonction* $\mathbf{P}_s$, *demi-total de la somme des potentiels atomiques et du produit de l'inconnue s par le moment d'inertie polaire du système relativement à un point quelconque de l'espace.*

On sait que l'Hessien d'une fonction d'un nombre quelconque de variables se reproduit identiquement lorsqu'on opère une substitution orthogonale. Par conséquent $\mathfrak{D}'_s$ *est indépendant des axes de coordonnées auxquels on rapporte la figure.*

On arrive plus simplement à cette conclusion en se reportant à la formule (27), et se rappelant que $\mathfrak{D}_s$ est indépendant des axes des coordonnées, comme nous l'avons démontré au § V.

7. *Résumé.* — L'équation en s

$$\mathfrak{D}'_s = \Gamma^3 \mathfrak{D}_s = 0, \tag{33}$$

du degré $3\mathbb{N}$, a toutes ses racines réelles.

On distingue trois racines nulles.

Les autres racines se divisent en positives s, dont nous désignerons le nombre par μ, et en négatives σ dont nous désignerons le nombre par ν. On a alors

$$\mu + \nu = 3(\mathbb{N} - 1). \tag{34}$$

Au moyen de ces notations, le mouvement infinitésimal de l'atome m se représente par des équations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} x_m &= ht + h' + \Sigma_\mu(h_m \sin t\sqrt{s} + h'_m \cos t\sqrt{s}) \\ &\quad + \Sigma_\nu(\mathrm{H}_m e^{t\sqrt{-\sigma}} + \mathrm{H}'_m e^{-t\sqrt{-\sigma}}), \\ y_m &= kt + k' + \Sigma_\mu(k_m \sin t\sqrt{s} + k'_m \cos t\sqrt{s}) \\ &\quad + \Sigma_\nu(\mathrm{K}_m e^{t\sqrt{-\sigma}} + \mathrm{K}'_m e^{-t\sqrt{-\sigma}}), \\ z_m &= lt + l' + \Sigma_\mu(l_m \sin t\sqrt{s} + l'_m \cos t\sqrt{s}) \\ &\quad + \Sigma_\nu(\mathrm{L}_m e^{t\sqrt{-\sigma}} + \mathrm{L}'_m e^{-t\sqrt{-\sigma}}), \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Σ_μ désignant la somme de μ binômes trigonométriques correspondant aux racines positives s, tandis que Σ_ν désigne la somme de ν binômes exponentiels correspondant aux racines négatives σ.

Les coefficients (h, k, l) et (h', k', l'), qui appartiennent aux binômes linéaires, sont les mêmes pour tous les atomes. Les premiers sont les

trois projections de la vitesse acquise au temps zéro par le centre de gravité du système atomique, en vertu des impulsions initiales; les trois derniers sont les projections du déplacement subi par ce centre de gravité, par suite des déplacements atomiques au temps zéro.

Les coefficients (h_m, k_m, l_m) et (h'_m, k'_m, l'_m), appartenant aux binômes trigonométriques, relatifs à une racine positive s, varient d'un atome à un autre. On a donc, pour chaque racine s, 6N coefficients distincts. Mais ces paramètres ne sont pas tous arbitraires; ils sont liés entre eux par des équations linéaires, qui peuvent être très-simplement définies au moyen des potentiels par une notation symbolique.

A cet effet, regardons h_n, k_n, l_n comme représentant des variations infinitésimales de X_n, Y_n, Z_n, et désignons par

$$\delta\frac{d\mathbf{P}_s}{dX_m}, \quad \delta\frac{d\mathbf{P}_s}{dY_m}, \quad \delta\frac{d\mathbf{P}_s}{dZ_m}$$

les variations totales correspondantes des trois dérivées de la fonction $\mathbf{P}_s$ relativement aux coordonnées de l'atome m que nous considérons en particulier. Nous poserons

$$\delta\frac{\mathbf{P}_s}{dX_m} = 0, \quad \delta\frac{\mathbf{P}_s}{dY_m} = 0, \quad \delta\frac{\mathbf{P}_s}{dZ_m} = 0. \tag{36}$$

Écrivant des équations analogues pour chaque atome du système, nous obtiendrons un système de 3N équations linéaires et homogènes entre les paramètres h_n, k_n, l_n. Le *résultant* de ce système est égal à $\mathfrak{D}'_s$ et s'annule en vertu de l'équation (33). On peut donc prendre arbitrairement un des paramètres et calculer tous les autres.

En procédant de même pour les h'_n, k'_n, l'_n, nous obtiendrons un système d'équations tout à fait analogue, qui se déduirait du précédent en ajoutant un accent à chacun des h_n, k_n, l_n. On peut donc encore prendre arbitrairement un des paramètres et calculer tous les autres.

Ainsi les 6N coefficients introduits par chaque racine positive dans le système total des équations (35) se réduisent à deux arbitraires.

Il en est absolument de même des 6N coefficients, tels que (H_m, K_m, L_m) et (H'_m, K'_m, L'_m), qu'introduit chaque racine négative dans les équations des mouvements atomiques.

En résumé, le système de ces équations contient :

1° Les 6 coefficients (h, k, l), (h', k', l');

2° $6\mu N$ coefficients, tels que (h_m, k_m, l_m), (h'_m, k'_m, l'_m), résultant, pour chaque atome m, de chaque racine positive s;

3° $6\nu N$ coefficients tels que (H_m, K_m, L_m), (H'_m, K'_m, L'_m), résultant, pour chaque atome m, de chaque racine négative σ; soit en tout :

$$6(1 + \mu N + \nu N) = 6[1 + 3N(N - 1)]$$

coefficients.

Mais ces paramètres se réduisent à

$$6 + 2(\mu + \nu) = 6N$$

arbitraires, ainsi que cela doit être pour un système d'équations finies qui représente l'intégration générale de $3N$ équations différentielles du second ordre.

Ces $6N$ constantes arbitraires peuvent se déterminer d'après les conditions initiales du mouvement, savoir : les projections des déplacements et des vitesses au temps zéro pour tous les points du système atomique.