JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Note sur les singularités élevées des courbes planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 425-434.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__425_0>

NOTE

SUR

LES SINGULARITÉS ÉLEVÉES DES COURBES PLANES;

PAR M. DE LA GOURNERIE.

AVANT-PROPOS.

Dans un Mémoire inséré au VII^e volume du *Quarterly Journal*, M. Cayley a établi que toute singularité d'une courbe plane est *équivalente* à des nombres déterminés de points doubles, de rebroussements, de tangentes doubles et d'inflexions, de telle sorte que lorsque ces quatre nombres sont connus pour toutes les singularités d'une courbe, on peut immédiatement appliquer à cette courbe les trois équations de Plücker, et aussi savoir à quel genre elle appartient d'après sa déficience (*deficiency*), c'est-à-dire d'après la différence qui existe entre les deux nombres de points doubles que son ordre comporte et qu'elle possède réellement. M. Cayley a, de plus, donné des formules pour calculer les quatre nombres qui représentent une singularité, lorsqu'on connaît, pour les différentes branches qui la constituent, des équations distinctes résolues par rapport à l'une des coordonnées. Je me propose de montrer comment on peut déduire ces équations de l'équation générale de la courbe.

Je donnerai ensuite quelques résultats sur les rayons de courbure à un point multiple, et sur les contacts que les différentes branches peuvent avoir les unes avec les autres.

Cette Note est composée de deux Parties; la seconde, entièrement consacrée à des applications, a été, faute de place, rejetée au numéro de janvier du volume suivant.

PREMIÈRE PARTIE.

Équations caractéristiques des différentes branches qui passent à un point multiple.

1. Je considère une courbe algébrique ayant un point multiple, et je suppose qu'en ce point, où je place l'origine des coordonnées, plusieurs branches ont des contacts de divers ordres avec une même droite, qui sera notre axe des abscisses.

Je choisis pour variables l'abscisse x et le rapport u de l'ordonnée à l'abscisse. Quand x est infiniment petit, u a des valeurs infiniment petites de divers ordres, qui correspondent aux branches tangentes à l'axe des abscisses, et des valeurs finies qui déterminent les tangentes des autres branches à l'origine.

Si l'on sait que u a des valeurs de l'ordre $\frac{p}{q}$, on les obtiendra en supposant dans l'équation x et u infiniment petits des ordres 1 et $\frac{p}{q}$, et ne conservant que les termes de l'ordre le moins élevé. L'équation réduite sera de la forme

$$(1)\qquad x^s u^t [a u^{nq} + a_1 x^p u^{(n-1)q} + a_2 x^{2p} u^{(n-2)q} + \ldots + a_n x^{np}] = 0.$$

Tous les termes sont de l'ordre $\left(s + \frac{p}{q} t + pn\right)$.

En désignant par k une des n racines de l'équation

$$(2)\qquad a\left(\frac{u^q}{x^p}\right)^n + a_1\left(\frac{u^q}{x^p}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{u^q}{x^p}\right)^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

on aura

$$(3)\qquad u^q - kx^p = 0.$$

Dans tout ce qui suit, les nombres p et q seront considérés comme premiers entre eux, et, par conséquent, les facteurs communs qu'ils pourraient contenir doivent être reportés dans les exposants de l'équation (2).

L'expression (3) indique une branche composée de q branches partielles [*] tangentes à l'axe des abscisses.

J'ai supprimé les facteurs x^s et u^t. Le second montre que u a t valeurs d'ordres supérieurs à $\frac{p}{q}$. Les valeurs de u d'ordres inférieurs à cette quantité doivent être considérées comme infinies, et les abscisses qui leur correspondent comme nulles. Le facteur x^s indique donc que les branches pour lesquelles les valeurs de u sont d'ordres inférieurs à $\frac{p}{q}$ possèdent, sur l'axe des abscisses, s points coïncidant avec l'origine, indépendamment de ceux qui forment la multiplicité de ce point singulier.

Si la variable u n'avait pas de valeur de l'ordre $\frac{p}{q}$, le premier membre de l'équation (1) se réduirait à un seul terme $ax^s u^t$. Les exposants s et t conserveraient d'ailleurs les significations que je viens d'indiquer.

2. Dans la seconde Partie, en discutant des courbes particulières, je montrerai que les résultats obtenus à l'article précédent permettent de déterminer facilement les grandeurs principales des valeurs de divers ordres que prend u quand x est infiniment petit du premier ordre; mais, pour connaître la nature d'une branche, il est quelquefois nécessaire d'avoir le second terme du développement de u. Afin de pouvoir l'établir, nous devons d'abord nous rendre compte de la composition de l'équation générale, lorsqu'on y suppose les variables x et u infiniment petites des ordres 1 et $\frac{p}{q}$.

Cette équation, ne contenant que des puissances entières de x et de u, dans l'hypothèse que je viens de faire les ordres des différents termes sont des multiples de $\frac{1}{q}$. Je vais rechercher s'il peut exister des termes de tous ces degrés fractionnaires, à partir du plus petit,

[*] L'expression de *branches partielles* a été introduite par M. Cayley.

qui est $\left(s + \frac{p}{q}t + pn\right)$. Pour abréger, je désignerai cette quantité par $\frac{g}{q}$.

Il s'agit de reconnaître si l'on pourra toujours trouver deux exposants entiers et positifs μ et ν tels, qu'un terme $x^\mu u^\nu$ soit de l'ordre $\frac{g+i}{q}$, i étant un nombre entier déterminé.

On doit avoir

$$\mu + \nu\frac{p}{q} = \frac{g+i}{q}.$$

En appelant $\frac{p'}{q'}$ l'avant-dernière réduite de la fraction continue dans laquelle on peut développer $\frac{p}{q}$, on a

$$pq' - qp' = \pm 1,$$

et les valeurs de μ et de ν sont données par les relations

$$\mu = \mp p'(g+i) + \theta p, \quad \nu = \pm q'(g+i) - \theta q.$$

Le nombre entier θ doit être tel que μ et ν soient positifs. Afin de faire la discussion sans confusion, il faut examiner successivement les formules qui repondent aux deux signes. Dans le cas du signe supérieur, les limites de θ sont

$$\theta > \frac{p'}{p}(g+i), \quad \theta < \frac{q'}{q}(g+i).$$

La seconde inégalité revient à

$$\theta < \frac{p'}{p}(g+i) + \frac{g}{pq} + \frac{i}{pq}.$$

En ayant égard à la valeur de $\frac{g}{q}$, on voit immédiatement que les deux limites de θ comprennent entre elles au moins un nombre entier. On arrive au même résultat, quand on considère le signe inférieur. Il résulte de là que l'équation peut contenir des termes des ordres $\frac{g+1}{q}$, $\frac{g+2}{q}$,.... J'appelle $\frac{g+i}{q}$ l'ordre des termes les moins élevés qu'elle renferme effectivement, après ceux de l'ordre $\frac{g}{q}\cdot$ Je représenterai leur somme par $T_{\frac{g+i}{q}}$, et la somme des termes d'un ordre quelconque h par T_h.

3. Nous allons maintenant chercher le second terme dans le développement de u^q.

En désignant par r la multiplicité de la racine k dans l'équation (2), et négligeant les termes élevés, j'ai

$$(u^q - kx^p)^r T_{\frac{g}{q}-pr} + T_{\frac{g+i}{q}} = 0.$$

Je suppose que le polynôme $T_{\frac{g+i}{q}}$ ne contient pas en facteur $(u^q - kx^p)$; j'examinerai plus loin (nº 5) le cas que j'éloigne. J'appelle u_1 la grandeur principale de u, et j'obtiens

$$(4) \qquad u_1^q = kx^p,$$

$$u^q = u_1^q + \sqrt[r]{-\frac{T_{\frac{g+i}{q}}}{T_{\frac{g}{q}-pr}}}\cdot$$

La quantité sous le radical est fonction de x et de u, mais, comme nous ne devons en conserver que le terme de l'ordre le moins élevé, nous pouvons y remplacer u par u_1.

$T_{\frac{g+i}{q}}$ représente une somme de termes de la même forme que le premier membre de l'équation (1). On en éliminera les puissances entières de u_1^q par la relation (4) : les termes ne contiendront plus que des puissances de u_1 inférieures à q, et seront tous composés de la même manière en x et en u_1. Leur somme algébrique donnera une expression $ax^\alpha u_1^\beta$, les exposants α et β étant soumis à la condition

$$\alpha + \beta\frac{p}{q} = \frac{g+i}{q}.$$

On opérera de la même manière sur le dénominateur, et, après avoir effectué la division, on aura, en désignant par b un coefficient numérique,

$$u^q = u_1^q + \sqrt[r]{b x^\alpha u_1^\beta}, \tag{5}$$

avec la condition

$$\alpha + \beta \frac{p}{q} = pr + \frac{i}{q}. \tag{6}$$

Je prends la racine q, et ne conservant que les deux premiers termes du développement, j'obtiens

$$u = u_1\left[1 + \frac{1}{qk}\left(b x^{\alpha - pr} u_1^\beta\right)^{\frac{1}{r}}\right]. \tag{7}$$

La branche déterminée par la racine multiple k se décompose en qr branches partielles réparties en q groupes.

L'abscisse x étant prise pour infiniment petit du premier ordre, les ordonnées seront infiniment petites de l'ordre $\left(\frac{p}{q} + 1\right)$. La différence des ordonnées de deux branches partielles d'un même groupe est

$$\frac{p}{q} + 1 + \frac{1}{r}\left(\alpha + \beta \frac{p}{q}\right) - p. \tag{8}$$

En vertu de l'équation (6), cette expression se réduit à

$$\frac{p}{q} + 1 + \frac{i}{qr}.$$

Nous connaissons maintenant l'ordre de la différence de deux ordonnées infiniment petites de deux branches partielles appartenant soit à un même groupe, soit à deux groupes différents, et par suite il serait facile d'appliquer les formules de M. Cayley à une courbe donnée.

Si l'on suppose i égal à l'unité, on aura la plus petite valeur que puisse avoir l'ordre de la différence des ordonnées de deux branches partielles d'un même groupe, et notamment des deux branches d'un rebroussement de seconde espèce.

Si l'on voulait avoir le troisième terme du développement de u, il faudrait poser

$$u = u_1 + \frac{u_1}{qk}\left(b x^{\alpha - pr} u_1^{\beta}\right)^{\frac{1}{r}} + u_2,$$

porter cette valeur de u dans l'équation générale, et déterminer la valeur de u_2.

4. La branche considérée est imaginaire quand k est lui-même imaginaire. Je supposerai k réel et je distinguerai deux cas principaux, suivant que r sera impair ou pair.

I. *r impair.* — A. p impair et q pair : rebroussement de première espèce.

B. p pair et q impair : branche traversée par sa tangente.

C. p et q impairs : branche sans singularité apparente.

II. *r pair.* — D. p impair, q pair, β pair : rebroussement (réel ou imaginaire) à quatre branches, dont deux de chaque côté de la tangente commune.

E. Un rebroussement de seconde espèce dans trois cas :

1° p pair, q impair, α impair.

2° p impair, q impair, α et β l'un pair et l'autre impair ;

3° p impair, q pair, β impair.

F. Deux arcs (réels ou imaginaires) ayant l'un avec l'autre un contact plus intime qu'avec leur tangente commune dans deux cas :

1° p impair, q impair, α et β tous deux pairs ou tous deux impairs ;

2° p pair, q impair, α pair.

Pour les rebroussements de première espèce avec point double, r et q sont respectivement égaux à 1 et à 2 ; p est un nombre impair quelconque. L'ordre de l'ordonnée infiniment petite est $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$, suivant la valeur de p.

Pour les rebroussements de seconde espèce avec point double, r et q sont respectivement égaux à 2 et à 1 ; p est un nombre entier quelconque. L'ordre de l'ordonnée infiniment petite est 1, 2, 3, ..., suivant la valeur de p.

5. Lorsque la quantité $(u^q - kx^p)$, se trouvera en facteur dans le polynôme $T_{\frac{g+i}{q}}$, on examinera si les polynômes suivants la renferment également, et on ne conservera avec eux que le premier de ceux qui ne la contiendront pas. On aura alors une équation entre trois infiniment petits $(u^q - kx^p)$, u, et x : les deux derniers étant connus, le problème pour obtenir les diverses valeurs du premier est exactement le même que celui qui s'est présenté pour les valeurs de u, et dont la solution a donné la valeur kx^p de u^q. Je donnerai plus loin un exemple de ce calcul.

6. La méthode est applicable pour la recherche des valeurs de u dont la grandeur principale est finie, c'est-à-dire du degré zéro. On peut aussi l'employer lorsque l'équation contient des termes irrationnels.

Le même mode d'investigation peut servir dans plusieurs autres circonstances, notamment lorsqu'on veut reconnaître si l'équation donnée d'un lieu représente une seule courbe ou plusieurs courbes distinctes. Alors, en supposant que l'on connaisse un point du lieu, on pourra, sans résoudre par rapport à une variable, composer l'équation d'une courbe ayant en ce point un contact de plus en plus élevé avec la courbe représentée, et on verra si l'on est conduit à prendre toute l'équation donnée, ou si le calcul se termine en donnant une équation d'un degré moindre.

Courbure d'une branche à un point multiple.

7. On déterminera les rayons de courbure des différentes branches partielles qui composent une branche, à l'aide de son équation caractéristique, en y considérant les variables comme des coordonnées finies. L'équation que l'on obtient ainsi représente en effet une courbe ayant avec la branche un contact élevé. Si la branche est tangente à l'axe des abscisses, les axes étant d'ailleurs supposés rectangulaires, l'expression du rayon de courbure ρ sera

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{q-p}}{k}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Le rayon de courbure est nul ou infini, suivant que p est plus petit ou plus grand que q. Il a une grandeur finie quand ces exposants sont égaux entre eux et, par suite, à l'unité, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Le rayon de courbure à un point de rebroussement de seconde espèce peut avoir une grandeur finie; mais il est nécessairement nul ou infini dans le cas d'un point de rebroussement de première espèce, car p est alors impair et q pair.

Je dois rappeler qu'un rayon de courbure nul n'indique pas nécessairement une singularité apparente. M. Cayley a fait cette remarque à l'occasion de la courbe qui est parallèle à l'ellipse, et qui passe par deux des points de rebroussement de sa développée (*Annali di Matematica*, 1860, p. 314).

8. En réalité, nous avons q rayons de courbure qui correspondent aux q branches partielles [*]. D'après l'équation (3), la branche a sur sa tangente à l'origine $(p+q)$ points réunis en un seul. On doit regarder que chaque branche partielle a en commun avec cette droite un nombre de points égal à $\frac{p+q}{q}$. Suivant que p est plus grand ou plus petit que q, le contact d'une branche partielle avec l'axe des abscisses est plus intime ou moins intime que celui d'une courbe ordinaire avec sa tangente. Lorsque p et q sont égaux, une branche est semblable à un arc ordinaire de courbe pour toutes les affections qui ne dépendent que du premier terme dans le développement de l'ordonnée infiniment petite y, et, par suite, le rayon de courbure doit avoir une grandeur finie.

9. Tout cercle passant par un point multiple de l'ordre q a en commun avec la courbe q points réunis en un seul, et doit être considéré comme osculateur si q est plus grand que 2. Quand un point de rebroussement est simplement double, pour qu'un cercle y soit

[*] Si le point considéré était multiple de l'ordre qr, les q rayons de courbure correspondraient aux q groupes de branches partielles.

osculateur, il faut qu'il touche la tangente de rebroussement, mais son rayon reste arbitraire. La longueur ρ donnée par l'équation ci-dessus est le rayon de développée qui forme transition entre les rayons de courbure des points situés en deçà et au delà du point singulier.

Cette considération a quelque importance; elle explique certaines transformations de courbes lieux de centres de courbure. Ainsi, quand on coupe une surface réglée par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière, les centres de courbure des sections pour les points situés sur la génératrice forment une hyperbole; et si l'on rend la surface développable en introduisant entre ses paramètres une relation convenable, l'hyperbole se réduit à deux droites dont une est le lieu des centres des cercles tangents à la section qui a un rebroussement au point même de rebroussement [*].

A un point de rebroussement, l'indétermination du centre de courbure est du même genre que l'indétermination de la tangente. Celle-ci amène un abaissement dans l'ordre de la polaire réciproque; la première doit produire un abaissement dans l'ordre de la développée.

---

[*] *Traité de Géométrie descriptive*, art. 840.