

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. BOILEAU

**Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme
des courants liquides**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 14 (1869), p. 361-377.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__361_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme
des courants liquides [*];*

PAR M. P. BOILEAU.

1. Les notions dues à Pitot, Couplet, Bossut, de Chézy, du Buat et Coulomb ont été judicieusement utilisées par Prony et ses successeurs, pour les besoins de la pratique, mais on n'en a pas, jusqu'à présent, déduit de lois exactes; en outre, le degré d'approximation des formules en usage n'est pas toujours suffisant, même entre les limites des expériences qui en ont fourni les facteurs numériques. Aux premières notions, Navier a ajouté une expression de la résistance intérieure au mouvement relatif de deux filets liquides immédiatement voisins, et l'hypothèse que cette expression représente semblait justifiée par la distribution des vitesses dans les canaux [**], mais les observations concernant les tuyaux de conduite [***] ont fait reconnaître qu'elle n'est pas applicable aux courants qui les remplissent.

2. Ces imperfections conduisent à examiner le principe fondamental des anciennes théories du régime uniforme, c'est-à-dire la notion de l'équilibre permanent entre la gravité et les résistances intérieures : lorsque avec Bossut et du Buat on assimile les courants à des solides glissant sur des surfaces inclinées, ou lorsque avec des auteurs modernes on les considère comme composés de couches infiniment minces glis-

[*] Les notions théoriques et expérimentales exposées dans ce travail ont fait l'objet d'un Mémoire présenté en 1868 à l'Académie des Sciences (voir les *Comptes rendus*, t. LXVII).

[**] Voir les savantes recherches analytiques de M. Sonnet publiées en 1845, travail qui présente le développement et des applications de la théorie générale de Navier.

[***] *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*, par H. Darcy (Paris, 1857).

sant à la manière des solides les unes sur les autres, les actions intérieures se réduisent à des frottements parallèles au mouvement de translation, en sorte que l'équilibre permanent de ces frottements et des composantes de la gravité parallèles à la même direction, est une condition nécessaire de la constance des vitesses; mais l'étude des phénomènes suggère des conceptions moins simples : elle conduit à regarder les liquides comme composés de particules ou petites masses séparées par des intervalles, mobiles en tous sens, et soumises aux lois de l'attraction universelle, de l'action du calorique latent et de la viscosité. Dans un semblable système, les forces intermoléculaires agissent suivant des lignes joignant entre eux, soit les centres, soit les pôles [*] des éléments matériels des courants, et leur intensité diminue à mesure que les distances réciproques de ces éléments augmentent; or, dans les courants à pente uniforme que l'on considère, les composantes de la gravité, soit dans la direction du mouvement de transport, soit normalement à cette direction, sont constantes, et, par conséquent, l'équilibre permanent dont il s'agit exigerait que, pour chaque particule fluide, celles de la résultante des actions mutuelles fussent également constantes. Cela posé, en remarquant que les distances intermoléculaires δ varient continuellement par suite de la différence des vitesses des filets liquides, et que les angles α des directions des actions mutuelles $f(\delta)$ avec le mouvement de transport diminuent quand ces distances augmentent, on voit que les composantes normales $f(\delta) \sin \alpha$, sont nécessairement variables, et l'on reconnaît qu'il est impossible d'admettre qu'elles produisent une action constante sur chaque particule liquide sans faire l'hypothèse, purement arbitraire, d'une compensation entre les effets des variations des distances de cette particule à celles qui l'environnent dans une sphère d'activité dont on ignore l'étendue. Quant aux composantes parallèles au courant, l'hypothèse de la constance de la somme algébrique de leurs valeurs dans cette étendue paraîtrait moins difficilement admis-

[*] Voir la note de la page 209 du *Traité de la Mesure des eaux Courantes*, publié au commencement de l'année 1854, ouvrage qui contient la plupart des résultats des recherches que j'avais effectuées de l'année 1845 à l'année 1852. Interrompues par les obligations du service militaire, ces recherches n'ont pu être reprises qu'en 1866.

sible, mais, pour l'équilibre permanent, il serait encore nécessaire de supposer arbitrairement une loi de l'influence de la pente du courant sur l'intensité des actions mutuelles des filets liquides. L'hypothèse précitée de Navier conduirait à considérer la vitesse relative de ces filets comme proportionnelle à la pente, tandis que les résultats d'observation s'accordent entre eux pour montrer qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de cette pente, toutes choses étant égales d'ailleurs.

3. La notion de la constance de la vitesse sur une trajectoire parallèle aux parois, qui a donné lieu à celle de l'équilibre des forces, n'est elle-même qu'une hypothèse, car les instruments d'observation qui ont été employés ne fournissaient que de moyennes vitesses de transport : ainsi, les indications des moulinets sont relatives au chemin total parcouru par les particules liquides dans un temps déterminé; l'inertie de leurs pièces rotatives ne leur permettrait pas d'ailleurs d'obéir à des variations de courte durée : celle de la masse des flotteurs et l'action latérale du fluide sont également des obstacles à une parfaite précision; dans l'usage du tube de Pitot ou des appareils analogues, on prend la hauteur moyenne des colonnes indicatrices, etc.

4. Les oscillations continuelles de ces colonnes liquides, qui se produisent dans les courants les mieux réglés, eussent dû faire naître l'idée de la *périodicité* des vitesses, propriété des fluides en mouvement qui ressort d'un grand nombre de faits; ainsi, les variations de la hauteur des jets d'eau ont été depuis longtemps remarquées, et elles se produisent sous des inclinaisons diverses, lors même que ces jets sont alimentés, comme à Versailles, par de vastes réservoirs : Savart a constaté en 1833 la périodicité de l'écoulement par des orifices circulaires sous une charge constante; dans mes expériences de l'année 1845, où j'employais un nouvel hydrodynamomètre, sorte de balance à ressort qui avait été douée d'une grande sensibilité, le levier transmettant les impulsions d'un courant établi dans les conditions du régime uniforme, exécutait un double système d'oscillations d'autant plus rapides que la vitesse du fluide était plus considérable. En ce qui concerne les rivières, il y a lieu de rappeler ici qu'en l'absence de toute agitation de l'atmosphère ou d'autres causes perturbatrices, j'ai remarqué, dans

le bruit des chutes par-dessus une digue, des accroissements et affaiblissements alternatifs réguliers [*]; postérieurement, dans des investigations effectuées sur le fleuve du Mississippi par une Commission composée d'ingénieurs militaires et de professeurs distingués des États-Unis, la périodicité du mouvement de transport s'est trouvée assez sensible pour être décelée par la marche des flotteurs.

3. La considération des *forces vives latentes* nous fournira de nouveaux motifs pour l'abandon des anciennes bases de la théorie, mais il convient d'examiner préalablement les phénomènes qui se produisent au contact des parois. On a jusqu'à présent admis qu'il existe entre ces surfaces solides et les liquides une adhérence naturelle, et l'on a même maintenu, dans de récents écrits, l'opinion ancienne que les molécules en contact avec les parois des canaux et des tuyaux de tout genre sont entièrement fixées par l'attraction; c'est encore une hypothèse arbitraire, car le liquide intérieur exerce sur les mêmes molécules une attraction en sens inverse; on peut d'ailleurs se convaincre, par l'expérience suivante, que l'adhérence n'est pas un fait constant. Les deux moitiés d'un tube en verre de 0^m,011 environ de diamètre ayant été séparées, je les ai insérées aux extrémités d'un long tuyau en caoutchouc vulcanisé, puis elles ont été rapprochées jusqu'au contact de deux génératrices extérieures, liées entre elles et suspendues verticalement contre un mur: cet appareil a été rempli d'eau, de manière à former une colonne continue et recourbée inférieurement, d'une longueur égale à 380 fois son diamètre moyen; lorsque le liquide était parvenu à l'état d'immobilité, je suspendais au-dessus de l'un des deux tubes en verre un fragment triangulaire de papier buvard dont la pointe était immergée de manière à produire une succion lente; il s'établissait alors, entre les sommets des deux colonnes liquides, une différence de niveau très-faible, mais sensible; puis, lorsque le papier étant ou enlevé ou saturé, le mouvement du liquide cessait, l'égalité de niveau se rétablissait. Pour compléter l'étude de la question de l'adhérence

[*] Cette observation doit être faite dans le calme de la nuit, et à une distance assez grande pour que les chocs de la partie inférieure de la chute ne produisent pas des perceptions confuses.

au sujet de laquelle mes expériences sur les nappes liquides des barrages-déversoirs avaient fourni, dès l'année 1846, quelques données nouvelles, j'ai fait plus récemment les observations suivantes sur une veine d'eau sortant d'un petit orifice pratiqué dans la paroi verticale mince d'un vase quadrangulaire dans lequel le niveau du liquide s'abaissait très-lentement. 1° A partir d'une certaine valeur de la charge sur le centre de l'orifice, valeur qui s'est trouvée de 40 millimètres pour un diamètre d'un millimètre et demi, la trajectoire parabolique de la veine liquide se déforme; sa partie descendante devient d'abord verticale, puis, n'étant plus qu'à une petite distance du sommet de l'angle de la paroi verticale du réservoir et de son fond posé horizontalement sur deux supports, cette partie de la veine prend une inflexion rentrante qui se prononce de plus en plus à mesure que le niveau baisse dans le réservoir; bientôt elle vient rencontrer l'arête de l'angle précité, et, à ce moment, elle s'applique rapidement sur la paroi verticale jusqu'à l'orifice. 2° La hauteur du niveau intérieur continuant à diminuer, l'angle aigu que le jet liquide fait avec la surface extérieure horizontale du fond du vase diminue progressivement; puis le liquide vient s'appliquer le long de cette surface, où il forme un courant suspendu contrairement à l'action de la pesanteur: ce courant était le plus souvent terminé par une petite masse arrondie d'où le liquide tombait goutte à goutte, et alors, vers le point où il atteignait ce renflement, il s'amincissait, ce qui indique une accélération. 3° Si, sous la partie d'amont du même courant, on place un récipient que l'on remplit lentement d'eau jusqu'à le faire déborder, au moment où le liquide de ce récipient vient en contact avec le premier, la partie d'aval du courant disparaît. 4° Lorsque, ce courant étant libre, on bouche l'orifice d'écoulement, le liquide dont il se compose tombe immédiatement.

L'inflexion que le jet subit lorsqu'il ne se trouve plus qu'à une petite distance de la paroi verticale du vase peut être attribuée à diverses causes, et notamment à une attraction d'électricités [*], mais

[*] On sait que l'écoulement de la vapeur d'eau par un orifice ouvert dans la paroi d'un générateur électrise en signes contraires cette paroi et la veine fluide; or l'illustre Faraday a constaté que ce phénomène est dû au frottement de l'eau entraînée à l'état liquide sur les bords de l'orifice.

nous nous occuperons seulement ici de la question de l'adhérence : la troisième expérience indique que l'action mutuelle des molécules d'eau était supérieure à celle de la paroi solide et du liquide, bien que la surface de contact fût plus grande pour cette dernière action que pour la première, ce qui ne permet guère de croire à une adhérence due à l'attraction des parois dans les canaux et les tuyaux de conduite; on peut concevoir une action retardatrice provenant de l'introduction du liquide dans les pores de certaines parois, mais c'est la cohésion qui serait en jeu. Pour expliquer les phénomènes de la deuxième et de la quatrième expérience, je rappellerai que dans mes observations sur les déversoirs, où de grandes nappes liquides de 120 millimètres d'épaisseur, au lieu de former un jet parabolique, s'appliquaient sur le sommet à arêtes vives et sur la face verticale d'aval du barrage, lorsque l'on plongeait jusqu'à ce barrage une tige solide quelconque, l'air extérieur se précipitait sous la nappe qui se détachait brusquement; cette expérience prouve qu'il se produit une diminution de pression dans les couches fluides en mouvement sur des surfaces solides, diminution qui cesse d'avoir lieu, d'après ce qui précède, en même temps que le mouvement, et l'on voit que le phénomène de l'application des nappes ou des jets liquides aux surfaces est dû principalement, sinon uniquement, à l'excès de la pression atmosphérique.

6. La perte de pression qui vient d'être mise en évidence ne peut être attribuée qu'aux mouvements intestins occasionnés par les aspérités des surfaces solides. En examinant ce qui a lieu autour des corps exposés à l'action d'un courant, on ne saurait douter que, quand la vitesse du fluide n'est pas très-faible, ces aspérités font naître des tourbillonnements; j'ajouterai que, dans le cas de parois rugueuses et de courants rapides, en exposant aux rayons solaires des jets jaillissant d'un tuyau, on peut remarquer que les couches enveloppes, jusqu'à une certaine distance des parois, sont composées de globules; cette constitution se manifestant à l'orifice, on doit croire qu'elle existe dans le tuyau : on conçoit facilement d'ailleurs, connaissant la tendance générale des liquides peu visqueux au groupement sphéroïdal, que ce groupement s'effectue quand les différences de vitesse résultant de l'obstacle opposé par les aspérités au mouvement de translation des

molécules qui les rencontrent, détruisent ou affaiblissent suffisamment la cohésion du liquide.

7- Les diverses observations qui précèdent conduisent à reconnaître que, dans une zone contiguë aux parois, il se produit des phénomènes particuliers de mouvement, de pression intérieure et de constitution qui doivent faire distinguer cette partie des courants; je lui donnerai le nom de *zone troublée*, et la masse qu'elle enveloppe sera désignée par celui de *région principale*.

8. Nous nous occuperons maintenant des mouvements intestins dont cette dernière région peut être le siège. M. Poncelet, à la suite d'importantes remarques sur la formation des tourbillons autour des corps immergés dans les courants, et sur la manière dont la force vive s'éteint dans les fluides [*], a énoncé l'opinion que de semblables mouvements, imprimés aux molécules ou à leurs derniers groupes « sont une des causes de la résistance que les filets fluides éprouvent à glisser les uns sur les autres ou sur la surface des corps solides » : en ce qui concerne les filets intérieurs des courants, l'illustre savant admettait, sans doute, que les tourbillonnements occasionnés par les aspérités des parois se propagent dans toute l'étendue de la masse liquide, ce qui paraît très-probable. Quoi qu'il en soit, lorsqu'on examine l'ensemble des faits connus sous le nom de *communication latérale du mouvement dans les fluides*, on ne saurait douter que la différence des vitesses engendre au moins des déviations, et par conséquent des forces vives transversales : les cours d'eau peuvent enlever au fond de leur lit des parcelles de matière plus dense qu'ils élèvent jusqu'à une certaine hauteur ou qu'ils laissent retomber selon les variations du régime [**]; les oscillations transversales des plantes fluviales à tiges isolées et très-flexibles sont en outre l'indice d'un état oscillatoire du fluide, observation que j'ai faite à l'origine de mes recherches et transformée en expériences

[*] Voir l'*Introduction à la Mécanique industrielle*, publiée par M. Poncelet en 1839, p. 528 et suivantes.

[**] Voir les résultats d'observation exposés pages 336 et suivantes du *Traité de la mesure des eaux courantes*.

précises [*]. Les différences de vitesse, lorsqu'elles sont, il est vrai, plus grandes que celles qui se produisent dans la région principale des courants à régime uniforme, peuvent modifier la constitution du liquide par suite de l'intensité des mouvements intestins; ainsi, dans mes expériences sur les remous, il est arrivé qu'un courant de fond faisait prendre à l'eau de ceux-ci un aspect huileux, et qu'il se formait à leur intérieur un grand nombre de petits sphéroïdes parfaitement distincts, phénomène analogue à la constitution globulaire que la zone troublée des courants (6) présente dans le cas des mouvements rapides.

*Bases d'une théorie expérimentale du régime uniforme
des courants liquides.*

9. On ne saurait songer à faire pénétrer la théorie dans le détail des mouvements intérieurs, et il serait également superflu d'essayer des équations différentielles fonctions de forces intermoléculaires dont on ignore l'intensité, la direction et la sphère d'activité, ces tâtonnements ne pouvant réussir que dans des cas très-simples où une seule loi est en question; mais il m'a paru possible d'obtenir, sans entrer dans le champ des hypothèses, des relations propres à la solution des problèmes de la pratique, et peut-être même susceptibles de contribuer, concurremment avec des recherches expérimentales, à la découverte de notions importantes concernant les actions mutuelles des molécules fluides ou de leurs groupes.

10. On a vu précédemment que de nombreuses observations tendent à prouver la périodicité du mouvement des fluides, mais que les instruments de mesure dont nous pouvons disposer indiquent, en général, des moyennes vitesses de transport: j'appliquerai la dénomination de *régime uniforme*, qui a été employée jusqu'à présent dans un sens trop absolu, à l'état du mouvement dans lequel ces vitesses sont sensiblement égales entre elles sur une même trajectoire parallèle aux parois, condition qui peut être réalisée par des dispositifs convenables,

[*] *Traité de la Mesure des eaux Courantes*, p. 332.

et qui se rencontre dans les tuyaux de conduite bien établis, dans les canaux, et même, à certaines époques de l'année, dans les rivières. Lorsque ce régime a lieu, les aires des sections transversales du courant faites par des plans perpendiculaires à la direction constante des trajectoires, sont égales entre elles ou ne diffèrent que de fractions négligeables : en réunissant par des lignes, dans l'une quelconque de ces sections, les points correspondant à une même vitesse expérimentale de transport, on obtient des courbes, dites d'*égale vitesse*, qui, d'après une observation importante de M. Baumgarten vérifiée postérieurement par MM. Darcy et Bazin, sont sensiblement parallèles au profil des parois dans le voisinage de celles-ci : à mesure qu'elles s'éloignent des parois, ce parallélisme s'altère de plus en plus, mais les modifications de courbure ne sont sensibles que pour de notables différences de vitesse.

Cette propriété étant générale, on peut la prendre pour base d'une division à la fois physique et géométrique des courants en éléments de volume distincts. Considérons, dans l'une des sections transversales, le système des molécules dont la vitesse expérimentale est v , puis les deux systèmes consécutivement voisins, dont l'un a une vitesse v' supérieure à celle-ci, tandis que l'autre se transporte avec une vitesse v'' inférieure à v : quelles que soient les lois de leurs mouvements latents, les particules du groupe considéré doivent, dans les variations continues de leur distance à celles des deux autres groupes entre lesquels elles se meuvent, passer périodiquement par des positions moyennes d'équilibre; nommons l , l' , l'' les lignes qui, respectivement, dans chacun des trois systèmes précités, joignent entre elles ces positions, et concevons une courbe A passant par le milieu de l'intervalle compris entre l et l'' , puis une deuxième courbe A' passant à égales distances de l et de l' : ces deux courbes dont l'intervalle est égal à la distance intermoléculaire moyenne ρ comprendront entre elles les molécules animées de la vitesse de transport v , qui oscillent autour de la ligne l . Concevons maintenant dans la même section deux normales communes à ces courbes et dont l'intervalle soit égal à la distance intermoléculaire moyenne ρ' considérée dans le sens tangentiel; cette distance étant extrêmement petite quoique finie, l'aire du quadrilatère limité par les deux normales et les arcs qu'elles interceptent sur les

courbes A et A' peut être mesurée par le produit $\rho\rho'$. Cela posé, j'appliquerai la dénomination de *filet liquide* employée jusqu'à présent, soit d'une manière vague, soit avec une signification purement abstraite, à l'élément du volume du courant qui a pour section transversale cette aire et pour arêtes des lignes parallèles à la direction du mouvement de transport : en outre, on pourra regarder les courants comme composés de volumes ayant pour section transversale l'aire comprise entre deux courbes telles que A et A' , et pour génératrices limites des lignes parallèles à la même direction; je désignerai ces derniers éléments de volume par le nom de *nappes à égale vitesse*. Les poids des filets et des nappes ainsi définis ont pour mesure le produit de leurs volumes par la densité gravimétrique des courants, car les proportions de la matière liquide et des intervalles qui n'en contiennent pas, y sont les mêmes que dans la masse totale.

11. Nous avons encore à faire une observation préliminaire concernant ce qu'on nomme ordinairement *pente* des courants : lorsqu'il s'agit des canaux, cette dénomination s'applique au sinus de l'inclinaison sous l'horizon de la surface liquide libre, qui est parallèle au fond du lit, sinus que l'on mesure au moyen d'un nivellement; mais, dans le cas des tuyaux, on nomme ainsi la différence, par mètre de longueur du courant, des colonnes liquides de piézomètres insérés dans la paroi, et cette différence peut s'écarter plus ou moins de la pente géométrique effective des filets. Pour employer une expression dont la signification soit uniforme, je remplacerai dans tous les cas celle dont il s'agit par la dénomination de *perte de chute*, appliquée à l'unité de longueur.

12. Nous nous occuperons d'abord de la région principale (7) des courants. Considérant l'unité de longueur d'une nappe à égale vitesse N , je désignerai par :

- v la *vitesse de transport* ou expérimentale commune à toutes ses molécules,
- ω l'aire constante de la section transversale de cette nappe,
- i la *perte de chute*,
- D le poids de l'unité de volume du courant.

La quantité de travail moteur produite, dans l'unité de temps, par la gravité, est

$$D\omega\nu i.$$

D'après les résultats d'observation, le système des nappes enveloppe un filet intérieur animé de la vitesse maxima, et les vitesses de ces nappes décroissent de l'une à l'autre d'une manière continue jusqu'à la zone troublée : en conséquence, la nappe quelconque N que nous considérons est située entre deux masses liquides auxquelles elle est liée par la cohésion, et dont l'une tend à retarder son mouvement, tandis que l'autre tend à l'accélérer : je désignerai par X, la quantité de travail, dans l'unité de temps, de l'action retardatrice, et par X celle de l'action accélératrice.

Quant aux mouvements intestins d'oscillation, de rotation ou de tourbillonnement dont chaque nappe peut être le siège, nous devons croire que les liaisons intermoléculaires leur opposent des résistances, car tous les mouvements analogues que leur amplitude rend observables s'affaiblissent progressivement et s'éteignent lorsqu'ils ne sont pas entretenus par une force appliquée, et l'on peut même augurer que la viscosité joue ici un rôle important, attendu que cet affaiblissement est d'autant plus rapide que les liquides sont plus visqueux. Comprenant dans un seul terme les quantités de travail dépensées par la gravité pour l'entretien de ces mouvements intestins qui ont une relation nécessaire avec la différence des vitesses de translation des nappes, je désignerai par ζ la perte de chute correspondante, de sorte que ce terme sera exprimé par le produit

$$D\omega\nu\zeta.$$

Les courants à régime uniforme étant exempts de causes d'irrégularité, telles que des obstacles intérieurs, des coudes, des variations de dimensions transversales, etc., les périodes successives du mouvement de translation de chaque élément liquide doivent être égales entre elles sous tous les rapports : or, dans un semblable régime, les effets de l'inertie se compensent. D'un autre côté, le travail de compression du liquide est nul ou parfaitement négligeable, et, enfin, aucun fait

connu ne nous autoriserait à supposer ici un travail thermo-dynamique.

En conséquence, le travail moteur de la gravité se répartit entre le mouvement sensible ou de transport, et les mouvements intestins ou latents : c'est le principe que nous proposons de substituer à l'hypothèse, infirmée par les observations précédemment rapportées, de l'équilibre permanent des forces.

15. Cela posé, l'équation du régime uniforme d'une nappe à égale vitesse quelconque de la région principale des courants est

$$(1) \quad D\omega v i = X_1 - X + D\omega v \zeta.$$

Soient maintenant :

v_2 la vitesse de transport de la nappe N_2 qui est immédiatement voisine de la nappe N du côté des parois,

ω_2 l'aire de sa section transversale,

ζ_2 la perte de chute correspondante aux mouvements intestins de cette seconde nappe,

X_2 le travail de la résistance que la masse liquide située entre elle et les parois oppose à son mouvement relatif.

L'action retardatrice appliquée à la surface externe A de la nappe précédente N peut être regardée comme une réaction de la nappe N_2 , opposée à l'action accélératrice exercée ou transmise par la première à la surface interne de cette seconde nappe, surface qui se confond avec A ; on a donc, pour la nappe N_2 , l'équation

$$D\omega_2 v_2 i = X_2 - X_1 + D\omega_2 v_2 \zeta_2.$$

Chacune des nappes suivantes donne lieu à une équation analogue, et si l'on spécifie par l'indice n les quantités qui se rapportent à celle à laquelle on s'arrête, la dernière équation est

$$D\omega_n v_n i = X_n - X_{n-1} + D\omega_n v_n \zeta_n.$$

L'addition de ces équations successives élimine les indéterminées $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1$ et a pour résultat une équation générale du régime uniforme d'une portion de la région principale du courant, comprise entre deux nappes à égale vitesse : or la somme des produits ωv , $\omega_2 v_2, \dots, \omega_n v_n$ est le volume liquide qui passe dans l'unité de temps par les sections transversales de cette portion du courant, c'est-à-dire son *débit*, que je désignerai par q : d'un autre côté, la somme des produits tels que $D\omega v\zeta$ est égale au travail moteur qui est consommé pour l'entretien des mouvements intestins, ou, si l'on veut adopter cette expression, des *forces vives latentes* [*] de la même partie considérée du courant : en désignant par z la perte de chute correspondante, on a donc

$$(2) \quad Dqi = X_n - X + Dqz.$$

En appliquant les considérations précédentes au cylindre liquide qui, limité par l'une quelconque des nappes à égale vitesse, comprend le filet intérieur animé de la vitesse maxima, et désignant par :

q_n le débit de ce cylindre,

z_n la perte de chute due à ses forces vives latentes,

on obtient l'équation

$$(3) \quad Dq_n i = X_n + Dq_n z_n.$$

14. Je m'occuperai maintenant de la zone troublée contiguë aux parois. Les observations concernant le parallélisme de ces parois et des courbes d'égale vitesse (10) ayant été prolongées, dans divers cas, jusqu'à une faible distance des premières, et le parallélisme s'étant trouvé, sans exception, croissant à mesure que cette distance diminuait, il est

[*] Les mouvements intérieurs dont il s'agit ici sont effectivement latents, attendu que les masses liquides, lorsque leur régime de transport est uniforme, présentent une apparence de calme. Quant aux mouvements très-visibles, ou même *tumultueux* dont on a un peu abusé pour justifier des désaccords entre l'expérience et la théorie sans indiquer des modifications à introduire dans celle-ci, ils ne se produisent que dans des circonstances particulières et anormales.

permis d'en inférer que, le long de parois uniformément constituées, les vitesses de transport sont, ou égales entre elles, ou très-peu différentes, que la zone dont il s'agit a une épaisseur uniforme, et qu'elle est limitée, du côté intérieur, par une nappe à égale vitesse. Cette nappe, qui appartient à la région principale du courant, exerce nécessairement sur le fluide de la zone, ou lui transmet, une action accélératrice dont je représenterai le travail dans l'unité de temps par X_0 . D'un autre côté, quelles que soient les résistances opposées par les parois au mouvement de transport du liquide, résistances parmi lesquelles la réaction des aspérités joue certainement le principal rôle, on peut, d'après l'observation précédente, les regarder comme constantes sur l'unité de surface des parois homogènes, propriété qui avait été admise sans examen jusqu'à présent. Enfin, pour tenir compte de l'augmentation de surface due aux aspérités, je multiplierai le périmètre mouillé S résultant de la mesure des dimensions transversales de la masse liquide, par un facteur c dépendant de l'état des parois, et auquel je donnerai le nom de *coefficient de rugosité*.

Cela posé, en désignant par :

β la somme des résistances que l'unité de surface des parois oppose au mouvement de transport du liquide,

w_0 la vitesse moyenne de la zone troublée,

on peut représenter le travail, dans l'unité de temps, de la résistance de l'unité de longueur des parois, par le produit $cS\beta w_0$.

La quantité de travail moteur de la gravité dans le même temps est $D\Omega_0 w_0 i$, si l'on désigne par Ω_0 l'aire de la section transversale de la zone troublée.

Au moyen de poussières flottant très-près de parois présentant des aspérités visibles, on peut s'assurer que la portion de la zone qui n'est pas engagée entre ces aspérités a un régime sensiblement uniforme; quant aux particules liquides qui les rencontrent, il peut sembler nécessaire de faire entrer dans les équations un terme représentant l'effet de leur inertie. En désignant par :

u' et u'' les valeurs de leur vitesse absolue au commencement et à la fin du temps considéré,

p le poids du liquide qui passe dans ce temps entre les aspérités,
on a pour expression du travail d'inertie

$$\frac{P}{2g}(u''^2 - u'^2),$$

quantité dont la valeur absolue se retranche du travail moteur ou s'y ajoute, selon que, dans le temps considéré, le mouvement vrai a été accéléré ou retardé. En définitive, l'équation relative à la zone troublée serait

$$(4) \quad D\Omega_0 w_0 i \pm \frac{P}{2g}(u''^2 - u'^2) = cS\beta w_0 + D\Omega_0 w_0 z_0 - X_0.$$

En faisant $X_n = X_0$ dans l'équation (3), puis éliminant X_0 entre cette équation, qui, après la substitution, s'applique à la région principale tout entière, et l'équation (4), on a

$$D(q_n + \Omega_0 w_0)i \pm \frac{P}{2g}(u''^2 - u'^2) = cS\beta w_0 + D(q_n z_n + \Omega_0 w_0 z_0).$$

On ne pourrait obtenir les valeurs du second terme du premier membre, mais il y a lieu de remarquer : 1° que la masse qu'il concerne n'est qu'une portion de la zone troublée, et, par conséquent, une très-petite fraction de la masse du courant; 2° que les vitesses u' et u'' doivent être très-faibles, les molécules liquides rencontrant incessamment des obstacles; 3° que ces molécules, en se déviant, passent dans les intervalles compris entre les aspérités, où elles doivent recevoir une certaine accélération succédant à un ralentissement produit par leur choc contre ces obstacles, en sorte que les effets de leur inertie, non-seulement sont très-faibles, mais en outre se compensent, sinon entièrement, au moins en partie. En conséquence, le terme dont il s'agit est parfaitement négligeable devant le travail total de la pesanteur représenté par le terme précédent. Cela posé, en désignant par :

Q le débit total du courant;

$T = D(q_n z_n + \Omega_0 w_0 z_0)$ la portion du travail moteur de la gravité qui est consommée pour l'entretien des forces vives latentes dans la totalité de la masse, sur l'unité de longueur, du courant,

l'équation précédente devient

$$(5) \quad DQi = cS\beta w_0 + T.$$

J'exposerai ultérieurement les considérations théoriques et les recherches expérimentales au moyen desquelles on peut obtenir des expressions du produit βw_0 et du travail T en fonction des données ordinaires des calculs des ingénieurs. D'après les déterminations que j'ai déjà pu effectuer, la perte de chute due aux mouvements intestins varierait, dans les tuyaux en fonte sans dépôts, entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{12}$ de la perte totale i .

15. On comprend l'imperfection des formules qui ont été proposées jusqu'à présent, en se rendant compte de la véritable signification des forces auxquelles a été attribué le rôle d'équilibrer les poids des masses fluides en agissant sur les molécules de leurs contours : considérant d'abord celle que l'on nomme *frottement sur les parois*, et dont les valeurs numériques ont été déterminées au moyen de nombreuses expériences, nous désignerons par :

F ce frottement sur l'unité de surface,
A l'aire de la section transversale du courant,
U sa vitesse moyenne.

On a posé la relation $SF = DAi$; or, en multipliant les deux membres de cette égalité par la vitesse moyenne, on a $SFU = DQi$, et en substituant au produit DQi sa valeur tirée de l'équation (5)

$$SFU = cS\beta w_0 + T,$$

ce qui montre que SF est un *effort moyen fictif* dont la quantité de travail effectuée le long d'un chemin égal à la vitesse moyenne du courant serait numériquement égale à la somme de celles qui sont consommées dans l'unité de temps par la résistance effective des parois et par les mouvements intestins de la masse liquide. Quant aux frottements des couches fluides les unes sur les autres, que l'on a fait intervenir de la même manière, soient :

σ et Ω le périmètre et l'aire de la section transversale d'un cylindre liquide intérieur limité par une nappe à égale vitesse,
 u sa vitesse moyenne,
 φ la résistance, par unité de surface, au glissement de ce cylindre sur la nappe qui l'enveloppe.

L'équation (3), dont le principe est incontestable, donne, en désignant par τ le travail latent de cette partie du courant,

$$D\Omega ui = X_n + \tau,$$

et, par conséquent, en y introduisant la notion de l'équilibre entre le frottement et la gravité,

$$\sigma\varphi \cdot u = X_n + \tau.$$

Ces résistances intérieures ont donc une signification analogue à celle des précédentes et sont également fictives. En faisant intervenir les unes et les autres au lieu d'actions retardatrices complexes dues à deux ordres de phénomènes dont les lois ne sont pas les mêmes, on ne pouvait réussir à les représenter par des formules simples et générales.