

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BOUSSINESQ

**Étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans
les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 13 (1868), p. 340-371.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13_340_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans
les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux;*

PAR M. BOUSSINESQ.

Ce Mémoire a pour objet : en premier lieu, d'établir les lois des vibrations rectilignes à très-courte période, produites dans un milieu isotrope, et celles des ondes quasi-transversales qui se propagent, à partir d'un seul centre d'ébranlement, dans l'éther des cristaux biréfringents; en deuxième lieu, d'appliquer ces lois à la démonstration des formules fondamentales de la diffraction.

Je considère d'abord un milieu isotrope, et je fais voir que les vibrations rectilignes y sont longitudinales ou transversales, c'est-à-dire perpendiculaires ou parallèles aux surfaces des ondes. Dans les deux cas, celles-ci ont leurs normales communes, les vibrations se font, pour toutes les molécules situées sur chacune de ces normales, suivant des droites parallèles, et la force vive se transmet intégralement d'une de ces molécules aux suivantes, avec la vitesse même des ondes. Il y a en outre, pour les vibrations longitudinales, cette loi particulière que l'amplitude est constante en tous les points d'une même onde, et, pour les vibrations transversales, celle-ci que, sur une même onde, l'amplitude varie, d'un point à un autre de la même ligne de vibration, en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine. J'appelle *ligne de vibration* toute ligne suivant la tangente de laquelle vibre la molécule située en un quelconque de ses points.

Ces lois restreignent le nombre des familles de surfaces qui peuvent être surfaces d'onde. Soit pour les vibrations longitudinales, soit pour les vibrations transversales, il n'y en a que trois, savoir : des

plans parallèles, des cylindres circulaires concentriques, des sphères concentriques.

Je passe ensuite aux milieux biréfringents. Les trois équations de leurs petits mouvements s'obtiennent en multipliant respectivement par trois coefficients presque égaux à l'unité les seconds membres des équations de mouvement d'un milieu isotrope. J'étudie les vibrations quasi-transversales correspondantes à des ondes propagées à partir de l'origine des coordonnées. Ces ondes sont celles de Fresnel, et les vibrations sont dirigées sensiblement, en chacun de leurs points, suivant la projection, sur le plan tangent à l'onde en ce point, du rayon qui y aboutit. Les lignes de vibration sont à très-peu près des ellipses sphériques, ayant leurs foyers sur les axes optiques; leurs trajectoires orthogonales sont des courbes sphériques de même nature. L'amplitude est soumise à trois lois; elle varie : 1° suivant un même rayon, en raison inverse de la distance à l'origine; et de plus, sur une même onde : 2° suivant une même ligne de vibration, en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine; 3° suivant une trajectoire orthogonale aux lignes de vibration, en raison inverse de la distance de cette trajectoire à la trajectoire voisine. En appelant r le rayon mené de l'origine à un point quelconque, U , U' les angles qu'il fait avec les deux axes optiques, ces trois lois reviennent à dire que le carré de l'amplitude est égal à une constante divisée par le produit $r^2 \sin U \sin U'$. C'est la formule qu'obtient M. Lamé, dans ses *Leçons sur l'élasticité*, § 126, par une tout autre voie et pour des milieux biréfringents d'une autre espèce.

Le Mémoire se termine par l'application de ces résultats à la théorie de la diffraction. Je trouve que la formule d'intensité donnée par Fresnel est sensiblement exacte lorsqu'il s'agit de vibrations transversales, comme dans le cas des ondes lumineuses, tandis qu'elle ne le serait pas pour des vibrations longitudinales. Quant à l'expression généralement admise pour la phase, elle devrait être diminuée de $\frac{\pi}{2}$.

§ I. — *Vibrations rectilignes dans les milieux isotropes :
loi des normales communes.*

Soient, dans un milieu isotrope : x, y, z les coordonnées rectangulaires d'équilibre d'une molécule M ; u, v, w les déplacements suivant les axes de cette molécule à l'époque t . En désignant par θ la dilatation $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ et par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, on sait que les trois équations du mouvement sont de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \lambda \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = \lambda \frac{d\theta}{dy} + \mu \Delta_2 v, \\ \frac{d^2 w}{dt^2} = \lambda \frac{d\theta}{dz} + \mu \Delta_2 w. \end{cases}$$

Supposons que les molécules exécutent des vibrations rectilignes d'une période τ très-courte et d'une direction, variable d'un point à l'autre, définie par les cosinus m', n', p' de ses angles avec les axes. Si A et B désignent deux fonctions continues de x, y, z , les déplacements seront

$$(2) \quad \begin{cases} u = A m' \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - B), \\ v = A n' \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - B), \\ w = A p' \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - B); \end{cases}$$

A est l'amplitude, B = const. est l'équation des ondes. Si l'on mène à celles-ci, en chaque point (x, y, z) , une normale, les cosinus m, n, p des angles que fera sa direction avec les trois axes seront égaux à $\frac{1}{\Delta_1 B} \frac{dB}{dx}, \frac{1}{\Delta_1 B} \frac{dB}{dy}, \frac{1}{\Delta_1 B} \frac{dB}{dz}$, $\Delta_1 B$ désignant le paramètre différentiel

du premier ordre de B, c'est-à-dire l'expression $+\sqrt{\frac{dB^2}{dx^2} + \frac{dB^2}{dy^2} + \frac{dB^2}{dz^2}}$.

On peut concevoir des lignes perpendiculaires à toutes les ondes, qui

aient pour éléments des portions infiniment petites de ces normales. Celles d'entre ces lignes qui passent par (x, y, z) et par les points infiniment voisins forment ensemble un filet d'étendue que nous appellerons *rayon*, et dont nous désignerons par σ la section normale en (x, y, z) et par $d\varepsilon$ un élément de la longueur. Les ondes emploient pour parcourir le chemin $d\varepsilon$ un temps égal à l'accroissement $\frac{dB}{d\varepsilon} d\varepsilon$ que reçoit B le long de cet élément : leur vitesse ω en (x, y, z) est donc 1 divisé par $\frac{dB}{d\varepsilon}$, et son inverse est

$$\frac{dB}{d\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \frac{dB}{dx} m + \frac{dB}{dy} n + \frac{dB}{dz} p = \Delta_1 B.$$

Les valeurs (2) de u, v, w doivent vérifier les équations (1). Désignons par **S** la somme de trois termes analogues, dont le premier est écrit après ce signe, par exemple $\frac{dm}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp}{dz}$ pour **S** $\frac{dm}{dx}$; désignons de plus par $\frac{d}{d\varepsilon} = \mathbf{S} m \frac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction le long de la ligne $d\varepsilon$. Si nous observons que

$$\frac{dB}{dx} = \frac{m}{\omega}, \quad \frac{dB}{dy} = \frac{n}{\omega}, \quad \frac{dB}{dz} = \frac{p}{\omega},$$

nous trouverons aisément

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{4\pi^2}{\tau^2\omega^2} \left[A m \mathbf{S} m m' - \frac{\tau^2\omega^2}{4\pi^2} \frac{d\mathbf{S} \frac{d.Am'}{dx}}{dx} \right] \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - B) \\ &\quad + \frac{2\pi}{\tau\omega} \left[m \mathbf{S} \frac{d.Am'}{dx} + \omega \frac{d \frac{A \mathbf{S} m m'}}{dx} \right] \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - B), \\ \Delta_2 u &= -\frac{4\pi^2}{\tau^2\omega^2} \left[A m' - \frac{\tau^2\omega^2}{4\pi^2} \Delta_2 (A m') \right] \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - B) \\ &\quad + \frac{2\pi}{\tau\omega} \left[2 A \frac{dm'}{d\varepsilon} + m' \left(2 \frac{dA}{d\varepsilon} + A \mathbf{S} \frac{dm}{dx} - \frac{A}{\omega} \frac{d\omega}{d\varepsilon} \right) \right] \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - B). \end{aligned}$$

Ces valeurs, portées dans la première équation (1), devront la véri-

fier à toute époque, et donneront les deux relations

$$(3) \quad A[(\mu - \omega^2)m' + \lambda m S m m'] - \frac{\tau^2 \omega^2}{4\pi^2} \left[\lambda \frac{dS}{dx} \frac{dA m'}{dx} + \mu \Delta_z (A m') \right] = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda \left[m S \frac{dA m'}{dx} + \omega \frac{dA S m m'}{dx} \right] \\ & + \mu \left[2A \frac{dm'}{dz} + m' \left(2 \frac{dA}{dz} + A S \frac{dm}{dx} - \frac{A}{\omega} \frac{d\omega}{dz} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres équations du mouvement donneront deux relations pareilles à (3) et deux pareilles à (4).

La longueur d'onde $\tau\omega$ étant excessivement petite, le second terme de l'équation (3), en $\tau^2\omega^2$, est entièrement négligeable à côté du premier, excepté aux endroits où A, m', n', p' varieraient très-rapidement d'un point aux points voisins. Mais, en de tels endroits, on ne doit pas compter sur les équations (1), qui ne peuvent être établies qu'en admettant la continuité de u, v, w . Ce cas excepté, la relation (3) et ses deux pareilles ne sont autres que celles des ondes planes. En les ajoutant, après les avoir respectivement multipliées par m, n, p , on reconnaît aisément qu'elles donnent

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \text{soit des vibrations longitudinales, avec} \\ & \quad m' = m, \quad n' = n, \quad p' = p, \quad \omega^2 = \lambda + \mu; \\ & \text{soit des vibrations transversales, avec} \\ & \quad S m m' = 0, \quad \omega^2 = \mu. \end{aligned} \right.$$

Dans les deux cas, la vitesse de propagation ω est constante, et son inverse Δ, B l'est également. Cela revient à dire que les ondes ont leurs normales communes, et que, l'une d'elles étant donnée, toute autre est le lieu géométrique des extrémités des normales d'égale longueur menées à celle-là. En effet, si nous différencions par rapport à x la relation $\Delta, B = \text{const.}$, il viendra

$$(6) \quad \frac{1}{\Delta, B} \left(\frac{dB}{dx} \frac{d^2 B}{dx^2} + \frac{dB}{dy} \frac{d^2 B}{dx dy} + \frac{dB}{dz} \frac{d^2 B}{dx dz} \right) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d}{dz} \frac{dB}{dx} = 0.$$

Donc les dérivées partielles de B par rapport à x, y, z et par conséquent les cosinus m, n, p ne changent pas le long d'un chemin normal aux ondes. Ce chemin est une ligne droite, et toutes les ondes ont les mêmes normales. Il résulte d'ailleurs évidemment de la relation $\frac{dB}{d\varepsilon} = \text{const.}$, que la distance $d\varepsilon$ de deux ondes infiniment voisines est constante, et que par suite l'une quelconque d'entre elles est le lieu géométrique des extrémités des normales d'égale longueur menées à une autre.

§ II. — *Transmission des forces vives.*

Occupons-nous actuellement de l'équation (4), et d'abord transformons-y l'expression $S \frac{dm}{dx}$. Si m, n, p désignent généralement, en chaque point (x, y, z) de l'espace, les cosinus des angles que fait avec les axes une droite fixe menée à partir de ce point, cette expression $\frac{dm}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp}{dz}$ aura la même valeur dans tous les systèmes possibles d'axes rectangulaires. Soit en effet un autre système quelconque d'axes rectangulaires des x_1 , des y_1 et des z_1 , faisant respectivement, avec ceux des x, y, z , des angles ayant leurs cosinus égaux à : a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' .

Désignons par m_1, n_1, p_1 les cosinus des angles que fait avec ces axes la direction (m, n, p) . Nous aurons les formules de transformation

$$\frac{d}{dx_1} = Sa \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy_1} = Sa' \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dz_1} = Sa'' \frac{d}{dx};$$

$$m_1 = Sam, \quad n_1 = Sa'm, \quad p_1 = Sa''m;$$

d'où

$$\frac{dm_1}{dx_1} = Sa \frac{d}{dx} Sam = Sa^2 \frac{dm}{dx} + Sbc \left(\frac{dn}{dz} + \frac{dp}{dy} \right),$$

$$S \frac{dm_1}{dx_1} = S(a^2 + a'^2 + a''^2) \frac{dm}{dx} + S(bc + b'c' + b''c'') \left(\frac{dn}{dz} + \frac{dp}{dy} \right),$$

relation qui, d'après des formules bien connues, se réduit à

$$(7) \quad S \frac{dm_1}{dx_1} = S \frac{dm}{dx}.$$

Nous pouvons donc admettre qu'on ait adopté pour axe des z la normale à l'onde au point M , et pour axes des x et des y les tangentes aux deux lignes de courbure de l'onde qui passent par ce point. Alors m, n seront nuls en M et très-petits aux points voisins, tandis que p en ces points ne différera de l'unité que d'une quantité du second ordre. On aura donc

$$\frac{dp}{dz} = 0,$$

et si l'on désigne par R, R' les rayons principaux de courbure de l'onde, on trouvera aisément

$$\frac{dm}{dx} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{dn}{dy} = -\frac{1}{R'}.$$

Par conséquent

$$(8) \quad S \frac{dm}{dx} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Représentons-nous un filet d'étendue normal aux ondes, limité latéralement, sur l'onde qui passe en M , par un rectangle ayant pour deux de ses côtés deux éléments α, α' des lignes de courbure menées à partir de ce point et pour surface $\alpha\alpha' = \sigma$. Ce filet sera coupé par l'onde suivante, distante de la première de $d\varepsilon$, suivant un parallélogramme presque rectangulaire dont deux côtés vaudront $\alpha + d\alpha, \alpha' + d\alpha'$, et dont la surface, sauf erreur du quatrième ordre, sera

$$(\alpha + d\alpha)(\alpha' + d\alpha') = \alpha\alpha' + d(\alpha\alpha') = \sigma + d\sigma.$$

D'ailleurs des triangles semblables donnent les proportions

$$\frac{\alpha + d\alpha}{\alpha} = \frac{R - d\varepsilon}{R}, \quad \frac{\alpha' + d\alpha'}{\alpha'} = \frac{R' - d\varepsilon}{R'},$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\varepsilon}{R}, \quad \frac{d\alpha'}{\alpha'} = -\frac{d\varepsilon}{R'}.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières égalités, on trouve

$$(9) \quad -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad \text{ou} \quad S \frac{dm}{dx} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

Il en résulte

$$2 \frac{dA}{d\varepsilon} + AS \frac{dm}{dx} - \frac{A}{\omega} \frac{d\omega}{dz} = \frac{\omega}{A\sigma} \frac{d \frac{A^2 \sigma}{\omega}}{d\varepsilon},$$

et l'équation (4) devient

$$(10) \quad \lambda \left(mS \frac{dAm'}{dx} + \omega \frac{d \frac{ASmm'}{\omega}}{dx} \right) + 2\mu A \frac{dm'}{d\varepsilon} + \frac{\mu m' \omega}{A\sigma} \frac{d \frac{A^2 \sigma}{\omega}}{d\varepsilon} = 0.$$

Ajoutons cette relation et ses deux pareilles, après les avoir respectivement multipliées par m' , n' , p' , et observons que de $S m'^2 = 1$, il résulte $S m' \frac{dm'}{d\varepsilon} = 0$. Si nous désignons par $d\varepsilon'$ un chemin infiniment petit, pris à partir de M dans le sens de la vibration, et par $\frac{d}{d\varepsilon'} = S m' \frac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction suivant cette direction, le résultat sera

$$\lambda \left(Smm' S \frac{dAm'}{dx} + \omega \frac{d \frac{ASmm'}{\omega}}{d\varepsilon'} \right) + \frac{\mu \omega}{A\sigma} \frac{d \frac{A^2 \sigma}{\omega}}{d\varepsilon} = 0.$$

Dans le cas des vibrations transversales, ou de $Smm' = 0$, cette équation se réduit à

$$(11) \quad \frac{d \frac{A^2 \sigma}{\omega}}{d\varepsilon} = 0.$$

Dans celui des vibrations longitudinales, ou de $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$, le terme en λ deviendra, grâce à (9), $\frac{\lambda \omega}{A\sigma} \frac{d \frac{A^2 \sigma}{\omega}}{d\varepsilon}$, et l'on aura la même équation (11).

Pour trouver le sens de cette équation, considérons le rayon ou petit filet normal aux ondes, dont la section variable est σ . Décomposons-le, par des ondes infiniment voisines, en tranches de hauteur constante $d\varepsilon$. L'une d'elles sera égale à $\sigma d\varepsilon$, et sa force vive à l'époque t , multipliée par le temps très-petit $\frac{d\varepsilon}{\omega}$ durant lequel il la

garde, sera le produit de sa densité par $\frac{4\pi^2}{\tau^2} \frac{A^2 \sigma}{\omega} d\varepsilon^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\tau} (t - B)$. Au bout du temps $\frac{d\varepsilon}{\omega}$, le produit pareil dans le volume suivant sera la même quantité; car, d'après (11), le coefficient du sinus carré ne changera pas, et le sinus ne changera pas lui-même, puisque t aura augmenté de $\frac{d\varepsilon}{\omega}$ et B de $\frac{dB}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\omega}$.

Ainsi le produit de la force vive que possède une tranche élémentaire du rayon à un instant quelconque, par le temps infiniment petit durant lequel cette tranche la garde, se transmet à la tranche suivante avec la vitesse même des ondes.

Sauf en quelques points spéciaux, la vitesse ω est constante; ce principe revient donc à dire que le carré de l'amplitude varie suivant un même rayon en raison inverse de la section normale du rayon.

Aux points où les rayons se rencontrent, c'est-à-dire sur la surface, lieu des centres principaux de courbure communs aux ondes, la force vive est incomparablement plus grande qu'ailleurs; cette surface est une caustique.

§ III. — Ondes longitudinales.

Nous allons maintenant étudier séparément les vibrations longitudinales et les vibrations transversales, en supposant ω constante, et par suite [(6)] les dérivées $\frac{dm}{d\varepsilon}$, $\frac{dn}{d\varepsilon}$, $\frac{dp}{d\varepsilon}$ égales à zéro.

Si l'onde est longitudinale, c'est-à-dire si $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$, l'équation (10) se réduit à

$$\frac{dA}{dx} + m \left(\frac{dA}{d\varepsilon} + \frac{A}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) = 0, \quad \text{ou, d'après (11),} \quad \frac{dA}{dx} = m \frac{dA}{d\varepsilon}.$$

On trouvera de même

$$\frac{dA}{dy} = n \frac{dA}{d\varepsilon}, \quad \frac{dA}{dz} = p \frac{dA}{d\varepsilon}.$$

Ces trois équations expriment que l'amplitude est constante sur toute l'étendue d'une même onde; telle est la loi particulière aux ondes longitudinales.

L'équation (11) achève de déterminer l'amplitude, puisqu'elle indique comment varie A d'une onde à la suivante. Il en résulte que la quantité $-\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz}$ ou $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ devra être la même sur toute une même onde; et que, par conséquent, les ondes longitudinales sont des surfaces dont la courbure moyenne $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ est constante. On peut déduire de là cette conséquence remarquable, que les seules familles de surfaces qui puissent être ondes longitudinales sont, ou des plans parallèles, ou des cylindres circulaires concentriques, ou des sphères concentriques.

En effet, considérons les normales communes aux ondes proposées. Leurs points d'intersection, c'est-à-dire les centres de courbure principaux, sont tous à l'infini, ou bien quelques uns à une distance finie. Dans le premier cas, les ondes sont des plans parallèles. Dans le second cas, menons l'onde qui passe par le point d'intersection de deux normales; sa courbure moyenne en ce point, et, par suite, en tous ses points, sera infinie. Donc cette onde centrale se réduit à une ligne ou à un point, où viennent aboutir toutes les normales. Si c'est une ligne, considérons un de ses éléments infiniment petits. Des points de cet élément partent dans tous les sens des normales, communes à cet élément et aux autres ondes. De plus ces normales, limitées à une même onde, ont toutes la même longueur. Par conséquent toute onde est formée d'une suite de tranches qui sont des fragments de cylindres circulaires de rayon constant, ayant pour axes les divers éléments de l'onde centrale. Une des courbures principales d'une telle surface est celle du cercle qui l'engendre, et l'autre courbure est nécessairement variable aux divers points d'un même cercle générateur, à moins que le lieu des centres de ces cercles ne soit une ligne droite. Les ondes sont donc des cylindres circulaires concentriques. Enfin, si l'onde centrale se réduit à un point, les autres seront des sphères concentriques.

Donc il n'y a pas d'autres ondes longitudinales possibles que celles constituées par des plans parallèles, par des cylindres circulaires concentriques, ou par des sphères concentriques. Elles se produisent respectivement quand on ébranle le milieu de la même manière, sur toute l'étendue d'un plan indéfini, tout autour d'une droite, tout autour d'un point.

§ IV. — Ondes transversales.

Si l'onde est transversale, ou que $\mathbf{S}mm' = 0$, l'équation (10) devient

$$\lambda m \mathbf{S} \frac{dAm'}{dx} + 2\mu A \frac{dm'}{ds} = 0,$$

qui, jointe à ses deux pareilles, donne

$$\frac{1}{m} \frac{dm'}{ds} = \frac{1}{n} \frac{dn'}{ds} = \frac{1}{p} \frac{dp'}{ds}.$$

Intégrons le long d'un même rayon, et observons que m, n, p restent invariables dans cette intégration. En désignant par m'_0, n'_0, p'_0 les valeurs initiales de m', n', p' , il viendra

$$\frac{m' - m'_0}{m} = \frac{n' - n'_0}{n} = \frac{p' - p'_0}{p}.$$

Multiplions respectivement les deux termes de ces rapports par m, n, p , et ajoutons-les terme à terme, en observant que $\mathbf{S}mm' = 0$, $\mathbf{S}mm'_0 = 0$. Nous verrons que la valeur de ces rapports est nulle, et que par suite

$$(12) \quad \frac{dm'}{ds} = \frac{dn'}{ds} = \frac{dp'}{ds} = 0.$$

Ainsi le long d'un même rayon, les vibrations se font suivant des droites parallèles. La même loi s'applique évidemment aux ondes longitudinales, puisque les vibrations y ont lieu suivant le rayon même.

L'équation (10) et ses deux analogues se réduisent actuellement à

$$(13) \quad \mathbf{S} \frac{dAm'}{dx} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{S} m' \frac{dA}{dx} + A \mathbf{S} \frac{dm'}{dx} = 0.$$

Cette relation, jointe à $\mathbf{S}mm' = 0$, exprime que θ est nul, ou que le mouvement se fait sans changement de densité.

Appelons $d\varepsilon$ un élément de chemin, mené, à partir du point considéré M , dans la direction (m', n', p') de la vibration, et (13) pourra

s'écrire

$$(14) \quad \frac{dA}{d\varepsilon} + A S \frac{dm'}{dx} = 0.$$

Nous avons démontré [(7)] que l'expression $S \frac{dm'}{dx}$ a la même valeur en chaque point, quel que soit le système d'axes rectangulaires adopté. Nous pouvons donc supposer que l'axe des y soit mené, à partir du point M, dans la direction (m, n, p) du rayon, et celui des z suivant la vibration. Nous aurons, en M, $m' = 0$, $n' = 0$, $p' = 1$. Nous pouvons d'ailleurs admettre qu'on ait tracé sur l'onde les lignes de vibration, c'est-à-dire les lignes telles, que toutes les molécules situées sur elles vibrent suivant leurs tangentes. Ces lignes découpent l'onde en bandes infiniment étroites. L'élément linéaire de direction (m', n', p') , mené à partir de M, est tangent à l'une de ces courbes, et la perpendiculaire qui le sépare en M de la ligne de vibration voisine, est parallèle à l'axe des x ; nous la désignerons par φ . La quantité $-\frac{dm'}{dx}$ est sensiblement, au point M, le rapport à φ de l'angle que fait la ligne de vibration menée en M avec la projection, sur le plan de cette ligne et de l'élément φ , de la ligne de vibration voisine; cette quantité est, sauf erreur négligeable, égale à $-\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\varepsilon}$. La dérivée $\frac{dn'}{dy}$ est nulle d'après les équations (12); $\frac{dp'}{dz}$ l'est encore, car p' ne varie aux environs de M que de quantités du second ordre. Ainsi la relation (14) devient

$$(15) \quad \frac{dA}{d\varepsilon} + \frac{A}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d(A\varphi)}{d\varepsilon} = 0.$$

Elle exprime que le produit $A\varphi$ est constant le long d'une bande comprise entre deux lignes infiniment voisines de vibration; mais il peut varier arbitrairement d'une bande à l'autre.

La loi particulière aux ondes transversales est donc que l'amplitude varie, suivant une ligne de vibration, en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine, située sur la même onde.

Cette loi, combinée avec les lois générales (11) et (12), restreint le nombre des familles de surfaces qui peuvent être surfaces d'ondes trans-

versales. Cherchons par exemple quelles surfaces d'ondes sont possibles avec des vibrations dirigées à volonté suivant l'un ou l'autre de leurs systèmes de lignes de courbure. Les surfaces développables formées par les normales aux ondes diviseront celles-ci en une infinité de petits rectangles, dont j'appellerai ε' la dimension parallèle à la vibration, et dont φ désigne déjà l'autre dimension. Leur surface sera $\varphi\varepsilon'$. D'après (11), le produit $A^2\varphi\varepsilon'$ ou $(A\varphi)^2\frac{\varepsilon'}{\varphi}$ sera constant le long d'une même normale, et par conséquent se trouvera le même en deux points correspondants de deux ondes. D'ailleurs $A\varphi$ est constant suivant une même ligne de vibration. Donc, en tous les points correspondants de deux ondes, situés sur une même surface développable formée par les normales, la fraction $\frac{\varepsilon'}{\varphi}$ relative à une des deux ondes est, à la fraction $\frac{\varepsilon'}{\varphi}$ relative à l'autre, dans un rapport constant. Si l'on

prend pour la première onde celle qui passe par un point où se réunissent deux génératrices de la surface développable, on aura en ce point $\varepsilon' = 0$, et par suite ε' sera nul sur toute la ligne de vibration qui y passe. Donc cette ligne se réduit à un point, et la surface développable est un cône. Il n'y a d'exception que pour le cas où les génératrices seraient parallèles; alors ce cône deviendrait un cylindre.

Ainsi les normales aux ondes, menées suivant une même ligne de courbure, se rencontrent en un même point, ou sont parallèles. Il peut se faire : 1° ou bien que les normales correspondantes aux deux systèmes de lignes de courbure soient parallèles; 2° ou bien qu'elles se rencontrent toutes au même point; 3° ou bien que celles d'un système, situées sur une même ligne de courbure, soient parallèles, et que celles de l'autre se rencontrent. Les ondes seront évidemment, dans le premier cas des plans parallèles, et dans le second des sphères concentriques. Dans le troisième, supposons les vibrations dirigées suivant le système des lignes de courbure qui correspondent aux normales parallèles. Alors ε' sera constant sur chaque rayon, et, tout le long d'une même ligne de vibration, en deux points correspondants de deux ondes, φ sur la première sera à φ sur la seconde dans un rapport constant. Si donc on mène la première par un point où se rencon-

trent deux normales appartenant aux lignes de courbure de l'autre système, on aura en ce point, et, par suite, sur toute la ligne de vibration qui y passe, $\varphi = 0$; c'est-à-dire que cette ligne de vibration est le lieu des points d'intersection des normales appartenant aux lignes de courbure du deuxième système. Elle constitue une onde centrale à laquelle viennent aboutir toutes les normales. Les ondes sont par suite composées de tranches ayant la forme de cylindres circulaires de rayon constant, avec les éléments de l'onde centrale pour axes. Comme une de leurs courbures principales est partout nulle, ce sont des cylindres circulaires concentriques.

Il y a donc seulement trois familles d'ondes, pouvant correspondre à des vibrations transversales dirigées suivant leurs lignes de courbure: ce sont des plans parallèles, des cylindres circulaires concentriques et des sphères concentriques, c'est-à-dire les mêmes que pour les vibrations longitudinales. On pourrait même les réduire aux deux dernières, car les plans parallèles n'en sont qu'un cas particulier.

Quand les ondes sont sphériques, les vibrations peuvent être dirigées d'une manière quelconque sur l'une d'elles. Si en particulier les lignes de vibration sont des cercles parallèles, l'amplitude sera constante sur chacune, mais variera arbitrairement d'une ligne à l'autre. On pourra par exemple la supposer nulle partout, excepté sur une bande très-mince. D'une onde à l'autre, et suivant un même rayon, elle décroîtra, d'après (11), en raison inverse de la distance au centre.

Pour établir toutes ces lois, nous avons supposé que u , v , w variaient d'une manière continue d'un point aux points voisins; ce n'est qu'à cette condition que l'on peut poser les équations (1), et négliger dans (3) les termes en $\tau^2 \omega^2$. Or cette condition n'est pas satisfaite à une trop petite distance du centre de l'ébranlement, dans les ondes sphériques. Donc les lois obtenues ne sont vraies qu'à partir d'une onde sphérique centrale, dont nous appellerons plus loin ζ le rayon, qui est très-petit et presque insensible.

§ V. — Ondes quasi-transversales dans les milieux biréfringents.

Après les équations (1), qui régissent les petits mouvements des milieux isotropes, les plus simples sont celles qu'on obtient en multi-

pliant respectivement les seconds membres de ces équations par trois coefficients $1 + a$, $1 + b$, $1 + c$, peu différents de l'unité :

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = (1 + a) \left(\lambda \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u \right), \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = (1 + b) \left(\lambda \frac{d\theta}{dy} + \mu \Delta_2 v \right), \\ \frac{d^2 w}{dt^2} = (1 + c) \left(\lambda \frac{d\theta}{dz} + \mu \Delta_2 w \right). \end{cases}$$

Ce sont celles que j'ai trouvées dans ma théorie nouvelle des ondes lumineuses [formules (15), avec $k = 0$] [*], pour représenter les vibrations de l'éther dans les cristaux transparents. Elles sont un cas très-particulier des équations (8) de mouvement des milieux isotropes déformés, étudiées dans un autre Mémoire [**]; il suffit de faire, dans ces équations (8), pour obtenir nos relations actuelles (16), $\lambda' = \lambda$, $\rho = \mu$, $\sigma = 0$, $\nu = 0$. Elles expliquent la double réfraction suivant les idées de Fresnel, puisque $\sigma = 0$ (voir § VIII de ce Mémoire); seulement les vibrations ne sont qu'à peu près transversales.

Je me propose d'étudier, parmi les ondes quasi-transversales qu'elles peuvent représenter, celles qui sont propagées à partir d'un centre unique, pris pour origine des coordonnées. Je me contenterai d'indiquer les résultats du dernier Mémoire cité, qui me seront nécessaires, me réservant d'étudier ici les lois de l'amplitude.

Nous avons vu (§ V du même Mémoire) que, si des ondes à vibrations rectilignes peuvent se propager à partir de l'origine, elles grandissent proportionnellement au temps en restant semblables à elles-mêmes, et sont les enveloppes de toutes les ondes planes parties en même temps qu'elles de l'origine. En posant

$$\mu(1 + a) = \alpha, \quad \mu(1 + b) = \beta, \quad \mu(1 + c) = \gamma,$$

celle qui est partie de l'origine depuis l'unité de temps a pour équation

$$(17) \quad S \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - \alpha}} = 1.$$

[*] *Journal de Mathématique pures et appliquées*, 2^e série, t. XIII, p. 330.

[**] *Journal de Mathématique pures et appliquées*, 2^e série, t. XIII, p. 221.

Menons à cette onde, en un point (x, y, z) , à l'extrémité du rayon $r = \sqrt{\mathbf{S}x^2}$, l'onde plane tangente.

Les cosinus m, n, p des angles de sa normale avec les axes seront (formules 23), sauf erreur du second ordre,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \frac{x}{r} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{x}{\mathbf{S}x^2 - \alpha} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}, \\ n &= \frac{y}{r} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{y}{\mathbf{S}x^2 - \beta} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}, \\ p &= \frac{z}{r} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{z}{\mathbf{S}x^2 - \gamma} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}. \end{aligned} \right.$$

Au même point (x, y, z) , les vibrations se font (formules 24) suivant la direction définie, sauf erreur du premier ordre, par les cosinus

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} m' &= \frac{x}{\mathbf{S}x^2 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}, \\ n' &= \frac{y}{\mathbf{S}x^2 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}, \\ p' &= \frac{z}{\mathbf{S}x^2 - \gamma} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}. \end{aligned} \right.$$

Ces valeurs donnent, comme il est aisé de le vérifier, $\mathbf{S}mm' = 0$, sauf erreur du second ordre, de telle sorte que si elles étaient exactes, les vibrations seraient transversales. Mais la formule (17) du même Mémoire fait voir que l'angle très-petit de la vibration avec l'onde est à très-peu près

$$(20) \quad \mathbf{S}mm' = \frac{\sqrt{\mu}}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}.$$

Avec les relations (19) et (20), on peut mettre sensiblement (18) sous

la forme

$$(21) \quad \begin{cases} m = \frac{x}{r} - \frac{\lambda}{\mu} m' \mathbf{S}mm', \\ n = \frac{y}{r} - \frac{\lambda}{\mu} n' \mathbf{S}mm', \\ p = \frac{z}{r} - \frac{\lambda}{\mu} p' \mathbf{S}mm'. \end{cases}$$

Enfin, tout le long d'un rayon, c'est-à-dire d'une droite quelconque émanée de l'origine, la direction (m, n, p) et la vitesse ω des ondes planes tangentes sont constantes, ainsi que les cosinus (m', n', p') qui fixent la direction de la vibration. On peut donc regarder les formules (21) comme s'étendant à toutes les ondes et non pas comme s'appliquant seulement à l'onde (17).

Nous désignerons toujours par $\frac{d}{d\varepsilon} = \mathbf{S}m \frac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction le long d'une normale menée en (x, y, z) à l'onde qui passe par ce point; par $\frac{d}{d\varepsilon'} = \mathbf{S}m' \frac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction suivant la vibration, et encore par $\frac{d}{dr} = \mathbf{S} \frac{x}{r} \frac{d}{dx}$ la dérivée suivant le rayon, qui est ici distinct de la normale.

Les valeurs de u, v, w étant représentées par les formules (2) du Mémoire actuel, la première équation (16) donnera évidemment les deux équations (3) et (4), dans lesquelles il suffira de remplacer λ et μ par $\lambda(1+a)$, $\mu(1+a)$. L'équation (3) et ses deux analogues, où l'on néglige les termes en $\tau^2 \omega^2$, deviendront les trois équations des ondes planes; elles sont vérifiées par le fait même qu'on adopte la surface (17) pour l'onde partie de l'origine depuis l'unité de temps, et les valeurs approchées (19) et (20) pour $m', n', p', \mathbf{S}mm'$. L'équation (4) ne change pas, car le facteur $1+a$ est commun à tous ses termes et disparaît: c'est elle, avec ses deux analogues, que devra vérifier l'amplitude A .

Le milieu étant presque isotrope, les dérivées partielles de ω seront très-petites, et on pourra négliger les termes qui les contiendront en même temps que d'autres quantités du premier ordre de petitesse; par exemple ω pourra être supposée constante dans les termes qui auront le facteur $\mathbf{S}mm'$.

§ VI. — *Première et deuxième lois de l'amplitude.*

L'équation (4) et ses deux pareilles, respectivement multipliées par m' , n' , p' et ajoutées, donnent

$$(22) \quad \lambda \left(\mathbf{S} m m' \mathbf{S} \frac{d.A m'}{dx} + \frac{d.A \mathbf{S} m m'}{d\varepsilon'} \right) + \mu \left(2 \frac{dA}{d\varepsilon} + A \mathbf{S} \frac{dm}{dx} - \frac{A}{\omega} \frac{d\omega}{d\varepsilon} \right) = 0.$$

Il résulte des formules (21) que

$$(23) \quad \frac{d}{d\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} m \frac{d}{dx} = \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{\mu} (\mathbf{S} m m') \frac{d}{d\varepsilon'},$$

$$\mathbf{S} \frac{dm}{dx} = \frac{2}{r} - \frac{\lambda}{\mu} \left(\mathbf{S} m m' \mathbf{S} \frac{dm'}{dx} + \frac{d \mathbf{S} m m'}{d\varepsilon'} \right);$$

et par suite, si l'on observe que $\frac{d\omega}{dr} = 0$ et que les termes du second ordre de petitesse sont négligeables,

$$2 \frac{dA}{d\varepsilon} + A \mathbf{S} \frac{dm}{dx} - \frac{A}{\omega} \frac{d\omega}{d\varepsilon} = 2 \left(\frac{dA}{dr} + \frac{A}{r} \right) - \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{d.A \mathbf{S} m m'}{d\varepsilon'} + \mathbf{S} m m' \mathbf{S} \frac{d.A m'}{dx} \right).$$

La relation (22) devient

$$(24) \quad \frac{dA}{dr} + \frac{A}{r} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d.A r}{dr} = 0.$$

D'où la première loi, analogue à celle de la relation (11) : l'amplitude, suivant un même rayon, varie en raison inverse de la distance au centre de l'ébranlement.

Tenons compte des formules précédentes, et rappelons que $\frac{dm'}{dr} = 0$; l'équation (4) deviendra

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (m - m' \mathbf{S} m m') \mathbf{S} \frac{d.A m'}{dx} + \frac{d.A \mathbf{S} m m'}{dx} \\ - m' \frac{d.A \mathbf{S} m m'}{d\varepsilon'} - 2 A (\mathbf{S} m m') \frac{dm'}{d\varepsilon'} = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions respectivement cette équation et ses deux pareilles

par m, n, p , puis ajoutons-les et négligeons les termes du second ordre de petitesse. Nous aurons

$$\mathbf{S} \frac{d.A m'}{dx} + \frac{dA}{dr} \mathbf{S} m m' - 2A \mathbf{S} m m' \mathbf{S} m \frac{dm'}{d\varepsilon} = 0.$$

Or, à cause de $\mathbf{S} m m'$ très-petit, on peut remplacer dans le troisième terme $\mathbf{S} m \frac{dm'}{d\varepsilon}$ par $-\mathbf{S} m' \frac{dm}{d\varepsilon}$; d'ailleurs, m, n, p valant sensiblement $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, on trouve au même degré d'approximation

$$\frac{dm}{d\varepsilon} = \frac{m'}{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{S} m \frac{dm'}{d\varepsilon} = -\frac{1}{r}.$$

Tenons compte de (24), et nous aurons simplement

$$(26) \quad \mathbf{S} \frac{d.A m'}{dx} + \frac{A}{r} \mathbf{S} m m' = 0,$$

Si l'on observe que le terme en $\mathbf{S} m m'$ est très-petit et que m', n', p' varient très-peu le long de la normale à l'onde, cette équation deviendra sensiblement pareille à (13) et se traitera de la même manière. Elle exprime que l'amplitude, aux divers points d'une même ligne de vibration, varie à peu près en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine, prise sur la même onde. Les vibrations n'étant que quasi-transversales, leurs lignes ne sont pas rigoureusement sur les ondes; mais il est clair qu'on peut les y supposer, sauf erreur négligeable, en les remplaçant par les projections sur ces surfaces des éléments rectilignes suivant lesquels vibrent les molécules qui y sont situées.

§ VII. — *Troisième loi.*

En éliminant $\mathbf{S} \frac{d.A m'}{dx}$ par la relation (26), on change (25) en

$$(27) \quad -m \frac{A}{r} \mathbf{S} m m' + \frac{d.A \mathbf{S} m m'}{dx} - m' \frac{d.A \mathbf{S} m m'}{d\varepsilon} - 2A (\mathbf{S} m m') \frac{dm'}{d\varepsilon} = 0.$$

Les relations (24) et (26) étant déjà deux conséquences distinctes

de l'équation (4) et de ses deux analogues, il suffit, pour achever de les interpréter, que nous en tirions une troisième conséquence. Appelons f , g , h les cosinus des angles que fait avec les axes la perpendiculaire menée, en (x, y, z) , à la normale (m, n, p) et à la projection de la vibration sur l'onde. Multiplions (27) et ses deux pareilles respectivement par f , g , h et ajoutons les résultats. De plus, appelons $d\varphi$ un élément de chemin pris dans la direction (f, g, h) et $\frac{d}{d\varphi}$ la dérivée d'une fonction suivant cette direction. En négligeant les quantités du second ordre, nous obtiendrons

$$(28) \quad \frac{d(A \mathbb{S} mm')}{d\varphi} - 2A \mathbb{S} mm' \mathbf{S} f \frac{dm'}{d\varepsilon'} = 0.$$

Au second terme qui contient le facteur $\mathbf{S} mm'$, (m', n', p') et $d\varepsilon'$ peuvent être censés, dans l'expression $\mathbf{S} f \frac{dm'}{d\varepsilon'}$, représenter la direction et la grandeur d'un élément de la ligne de vibration située sur l'onde. De $\mathbf{S} f m' = 0$ il résultera $\mathbf{S} f \frac{dm'}{d\varepsilon'} = -\mathbf{S} m' \frac{df}{d\varepsilon'}$. Or df, dg, dh étant les petits accroissements de f, g, h le long de l'élément $d\varepsilon'$, $\mathbf{S} m' df = \mathbf{S} m' (f + df)$ représente le cosinus de l'angle fait avec l'élément $d\varepsilon'$ par la trajectoire orthogonale de la ligne de vibration, trajectoire menée à la seconde extrémité de cet élément. Si ε' désigne la portion des lignes de vibration comprise entre deux trajectoires orthogonales infiniment voisines, on voit aisément que le rapport de ce cosinus à $d\varepsilon'$ vaut $\frac{1}{\varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{d\varphi}$. Donc l'équation (28) deviendra

$$(29) \quad \frac{d(A \mathbb{S} mm')}{d\varphi} + \frac{2A \mathbb{S} mm'}{\varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{d\varphi} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d(A \varepsilon'^2 \mathbb{S} mm')}{d\varphi} = 0.$$

Rappelons que, d'après les résultats du Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés, ou encore d'après les formules (21), la vibration est sensiblement dirigée suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde. Par suite, sur l'onde (17) par exemple, la trajectoire orthogonale aux lignes de vibration, menée en un point (x, y, z) , est l'intersection de l'onde par la sphère

$Sx^2 =$ une constante C , qui passe en ce point. Soient ∂x , ∂y , ∂z les projections sur les axes de la ligne ε' , dont la direction est donnée par les formules (19), et qui est comprise sur l'onde (17) entre la trajectoire $Sx^2 = C$ et celle-ci $Sx^2 = C + \partial C$. Nous aurons évidemment

$$\begin{aligned}\partial x &= \frac{x}{Sx^2 - \alpha} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{S \frac{x^2}{(Sx^2 - \alpha)^2}}}, \\ \partial y &= \frac{y}{Sx^2 - \beta} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{S \frac{x^2}{(Sx^2 - \alpha)^2}}}, \\ \partial z &= \frac{z}{Sx^2 - \gamma} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{S \frac{x^2}{(Sx^2 - \alpha)^2}}}, \\ 2Sx \partial x &= \partial C,\end{aligned}$$

et par suite, en tenant compte de (17),

$$\varepsilon' = \frac{\partial C}{2} \sqrt{S \frac{x^2}{(Sx^2 - \alpha)^2}}.$$

D'après (20), cette valeur de ε' est en raison inverse de Smm' , et (29) peut s'écrire

$$(30) \quad \frac{d.A \varepsilon'}{d\varphi} = 0.$$

D'où la troisième loi : Sur une même trajectoire orthogonale aux lignes de vibration situées sur une onde, l'amplitude varie en raison inverse de la distance de cette trajectoire à la trajectoire voisine.

Cette loi, par son énoncé, ressemble à la seconde; mais elle en diffère beaucoup par son importance et par sa généralité. En effet, la relation (29), qui la contient, a tous ses termes du premier ordre de petitesse, et si, dans un phénomène naturel, les valeurs de u , v , w n'étaient qu'à peu près représentées par les expressions (2), les deux premières lois seraient encore vérifiées, comme n'exprimant que le gros du phénomène, tandis que la relation (29) aurait de nouveaux

termes du même ordre de grandeur que ceux qui s'y trouvent, et donnerait pour l'amplitude une loi différente de (30).

Pareillement, les lois de l'amplitude, déduites de l'équation (4) et de ses deux analogues, doivent être moins bien vérifiées par les phénomènes que celles concernant la forme des ondes et la direction des vibrations, déduites de (3) et de ses deux pareilles : car, si l'on multiplie les équations du mouvement par $\tau^2 \omega^2$, l'équation (4) sera fournie par l'ensemble des termes de la première qui contiendront alors le facteur très-petit $\tau\omega$, tandis que (3), première équation des ondes planes, sera fournie dans sa partie sensible par l'ensemble des termes qui n'auront pas ce facteur; si donc u, v, w n'ont qu'à peu près la forme (2), les termes négligés influenceront plutôt sur (4) que sur (3).

§ VIII. — *Expression de l'amplitude.*

Il nous reste à déduire des deux dernières lois (26) et (30) l'expression de l'amplitude sur une onde particulière, par exemple sur l'onde (17), afin de montrer que ces deux lois ne sont pas contradictoires; ensuite la première loi (24) achèvera de déterminer l'amplitude en un point quelconque. Pour cela, il nous faut d'abord étudier rapidement les lignes de vibration et leurs trajectoires orthogonales.

Rappelons, du Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés (§ IV), que, si l'on coupe l'ellipsoïde d'élasticité $S\alpha x^2 = 1$ par un plan passant à l'origine, qu'on mène d'un même côté deux plans parallèles au premier et tangents à l'onde, et enfin les rayons qui aboutissent à leurs points de contact, les vibrations correspondantes au plus grand de ces rayons se font suivant le petit axe, égal à son inverse, de l'intersection du premier plan par l'ellipsoïde, et les vibrations correspondantes au plus petit de ces rayons se font suivant le grand axe, égal encore à son inverse, de la même ellipse d'intersection. Comme ces rayons sont très-voisins de la normale au plan, on peut leur substituer les rayons correspondants à cette normale.

Cela posé, si nous admettons qu'on ait choisi les axes de manière qu'on ait $\alpha > \beta > \gamma$, l'ellipsoïde aura deux sections circulaires passant par l'axe des y et également inclinées sur l'axe des x . Les normales à ces sections rencontreront donc à très-peu près aux mêmes

points les deux nappes de l'onde, c'est-à-dire qu'elles seront très-voisines des axes optiques où se réunissent les deux nappes. D'ailleurs les deux cercles seront égaux.

Considérons donc un rayon quelconque, les deux axes optiques, et trois plans menés par l'origine respectivement perpendiculaires à ce rayon et aux axes. Le premier de ces plans coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse et les deux autres suivant les deux sections circulaires égales. Ces deux derniers cercles intersectent donc l'ellipse du premier plan suivant deux diamètres égaux : par suite leurs intersections ont pour bissectrices les deux axes de l'ellipse. Or si l'on mène un plan par le rayon considéré et par chacun des axes optiques, ces plans couperont le plan de l'ellipse suivant deux lignes perpendiculaires à ces intersections et dont les angles auront les mêmes bissectrices. Par suite, les axes de l'ellipse seront contenus dans les plans bissecteurs des angles des deux plans qui passent par le rayon et par chacun des axes optiques. Les axes de l'ellipse donnant la direction des vibrations, il en résulte le théorème suivant, qui se trouve d'ailleurs dans les traités de double réfraction :

Si l'on fait passer un plan par un rayon et par chacun des axes optiques, les vibrations des molécules situées sur ce rayon se font suivant les plans bissecteurs des angles de ces deux plans.

Actuellement, U et U' désignant les deux angles que fait avec les axes optiques le rayon mené en un point quelconque d'une onde, je dis que les lignes de vibration sont à peu près des ellipses sphériques ayant leurs foyers sur les axes optiques, c'est-à-dire que, sur l'onde qui est presque une sphère, elles ont pour équation

$$U \mp U' = \text{const.}$$

Soient : A, A' (*fig. 1*) les intersections des deux axes optiques par l'onde considérée; MA, MA' deux lignes géodésiques ou très-sensiblement deux arcs de grand cercle qui joignent à ces points tout point M de l'onde; MN un élément de la ligne de vibration qui passe par ce point. Cet élément, d'après la loi ci-dessus, fait des angles égaux avec AM et avec $A'M$ ou avec le prolongement de AM et avec MA' . Menons par

la pensée deux arcs de grand cercle NA et NA' . Je dis que, dans le premier cas,

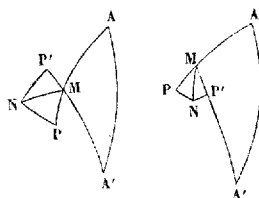
$$NA - NA' = MA - MA',$$

et que, dans le second,

$$NA + NA' = MA + MA'.$$

Des points A et A' , comme pôles, menons deux arcs infiniment petits NP, NP' , qui déterminent, suivant $AM, A'M$, deux arcs de grand cercle $AP, A'P'$ respectivement égaux à $AN, A'N$. Les deux triangles

FIG. 1.



$NPM, NP'M$, rectangles en P, P' , auront hypoténuse commune et l'angle aigu en M égal : par suite $MP = MP'$. Or MP est ce que gagne AM en devenant AN , et MP' est, dans le premier cas, ce que gagne et, dans le second, ce que perd l'autre distance $A'M$ en devenant $A'N$. Donc la différence ou la somme de ces deux distances reste constante quand le point M se déplace suivant une ligne de vibration.

Si le point M est en particulier sur l'axe des x , la considération de l'ellipsoïde d'élasticité montre que la vibration qui fait deux angles égaux avec MA et MA' correspond au plus grand rayon, c'est-à-dire à la nappe extérieure. Par la raison de continuité, il en sera de même si le point M se déplace d'une manière quelconque, à partir de l'axe des x , mais en restant sur la même nappe. Donc les lignes de vibration ont pour équation

$$U \mp U' = \text{une const. } C_1,$$

le signe $-$ correspondant à la nappe extérieure, le signe $+$ à la nappe intérieure.

Les trajectoires orthogonales aux lignes de vibration seront évidemment

$$U \pm U' = \text{une const. } C_2.$$

Évaluons l'élément $MN = ds$, en fonction de U et de dU . Pour cela, reportons-nous aux figures précédentes et appelons I , dans le premier cas, l'angle des deux arcs MA, MA' , et, dans le second, son supplément. Le triangle sphérique AMA' donnera, en désignant par $2\theta'$ l'angle des deux axes optiques,

$$\cos 2\theta' = \cos U \cos U' \pm \sin U \sin U' \cos I,$$

d'où

$$\cos \frac{I}{2} = \sqrt{\frac{\cos 2\theta' - \cos(U \pm U')}{\pm 2 \sin U \sin U'}}.$$

Or, dans le triangle MPN , où $MP = r dU$, on a

$$MN \quad \text{ou} \quad ds = \frac{rdU}{\cos \frac{I}{2}} = rdU \sqrt{\frac{\pm 2 \sin U \sin U'}{\cos 2\theta' - \cos(U \pm U')}}.$$

Observons que l'on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que l'équation de l'arc ds est

$$dU - dU' = 0 \quad \text{ou} \quad dU + dU' = 0.$$

Nous pouvons enfin calculer les distances infiniment petites φ ou ε' de deux lignes de vibration ou de deux trajectoires orthogonales à ces lignes. Il suffira de faire dans l'expression de ds : pour obtenir φ ,

$$dU \pm dU' = 0, \quad dU \mp dU' = dC_1, \quad U \mp U' = C_1;$$

pour obtenir ε' ,

$$dU \mp dU' = 0, \quad dU \pm dU' = dC_2, \quad U \pm U' = C_2.$$

Nous trouverons ainsi

$$(31) \quad \varphi = \frac{dC_1}{2} r \sqrt{\frac{\mp 2 \sin U \sin U'}{\cos 2\theta' - \cos C_1}}, \quad \varepsilon' = \frac{dC_2}{2} r \sqrt{\frac{\pm 2 \sin U \sin U'}{\cos 2\theta' - \cos C_2}}.$$

D'après la deuxième loi de l'amplitude, C_1 et dC_1 ne variant pas, le produit $A\varphi$ est constant, et, d'après la troisième, C_2 et dC_2 ne variant pas, $A\varepsilon'$ l'est également. Il est évident qu'on ne peut satisfaire à ces deux conditions qu'en prenant sur toute une onde

$$(32) \quad A = \frac{\text{constante}}{r \sqrt{\sin U \sin U'}}.$$

Cette valeur de A vérifiera aussi la première loi (24), si la constante est la même pour toutes les ondes : elle est donc l'expression générale de l'amplitude.

§ IX. — *Application à la diffraction et à la délimitation des rayons lumineux.*

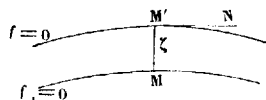
Généralement les ondes lumineuses qui se propagent dans un espace ne sont pas indéfinies; souvent au contraire elles sont très-restreintes dans le sens latéral, comme cela arrive pour un pinceau de lumière qui pénètre dans une chambre par une étroite ouverture. On sait comment, dans ce cas, la Physique actuelle explique la propagation du mouvement dans un sens à l'exclusion des autres. Elle suppose qu'on peut concevoir tous les points de la première onde considérée comme autant de centres d'ébranlement, propageant autour d'eux des vibrations d'une amplitude proportionnelle à celle de l'onde elle-même en ces points, et que la superposition de toutes ces vibrations fournit pour chaque molécule du milieu les vrais déplacements. On y joint toutefois cette hypothèse que les vibrations propagées autour de chaque point de l'onde primitive n'ont une amplitude appréciable qu'aux environs de la normale à cette onde. Les expressions que l'on déduit de là pour l'amplitude expliquent et permettent d'évaluer avec une précision suffisante les phénomènes concernant la diffraction et la délimitation des rayons lumineux. Toutefois les deux hypothèses admises peuvent laisser des doutes, la seconde surtout, car nous avons vu que, dans les vibrations transversales, l'amplitude ne varie pas d'une manière arbitraire aux divers points d'une même onde, mais en raison inverse de la distance de chaque ligne de vibration à la ligne de vibration voisine. Il y a donc

lieu d'examiner si l'analyse permet d'obtenir les formules dont on se sert en diffraction.

Supposons d'abord notre milieu homogène et isotrope, et de plus, afin de fixer les idées, limité inférieurement par une surface quelconque $f(x, y, z) = 0$, mais indéfini latéralement et en haut. Les molécules de la surface exécutent simultanément des vibrations transversales rectilignes, ayant une amplitude et une direction données, arbitrairement variables suivant une loi continue d'un point à l'autre, mais constantes en chaque point pendant un temps assez long. Bientôt toutes les molécules du milieu exécuteront des vibrations de même période τ . Proposons-nous d'obtenir l'expression de leurs déplacements u, v, w . Ceux-ci devront vérifier les équations (1), et de plus, tout près de la surface $f(x, y, z) = 0$, se réduire aux valeurs données.

Nous avons appelé ζ , à la fin du § IV, une distance presque insensible, qui est le rayon à partir duquel se vérifient les lois des ondes sphériques. Ce rayon, quoique très-petit, doit encore être assez grand par rapport à la longueur d'onde $\tau\omega$, puisqu'on peut, en comparaison, négliger dans l'équation (3) le terme qui contient $\tau^2\omega^2$. Construisons, au-dessous de $f(x, y, z) = 0$, à cette distance ζ , une autre surface $f_1(x, y, z) = 0$, que nous diviserons en parties infiniment petites $d\sigma$. Prenons un point M (fig. 2) dans chacune de ces parties,

FIG. 2.



comme centre de sphères que nous supposerons être des ondes propagées à partir de ce point. Menons par M la normale $MM' = \zeta$, commune à $f = 0$ et à $f_1 = 0$, et faisons passer un plan $MM'N$ par cette normale et par la vibration qui a lieu effectivement en M' . Supposons que, sur les ondes sphériques, les vibrations se fassent suivant des cercles parallèles à ce plan, avec une amplitude constante le long d'un même cercle et nulle partout, excepté sur une bande de quelques degrés de part et d'autre du plan. Enfin admettons que, sur

l'onde de rayon ζ , tangente en M' à $f = 0$, l'amplitude sur le grand cercle de vibration soit égale au facteur $\frac{d\sigma}{\tau\omega\zeta}$ multiplié par celle A qui a lieu effectivement en M' , et que de plus les vibrations sur la même onde aient une avance de temps $\frac{\tau}{4}$ sur celles qui ont lieu effectivement en M' . Chaque système d'ondes sphériques (*voir* la fin du § IV) donnera pour u , v , w des valeurs qui vérifieront les équations (1). Leur superposition les vérifiera donc également, et il suffira qu'elle donne en M' les valeurs effectives de u , v , w pour constituer la solution du problème. Or je vais démontrer qu'elle les donne en effet.

Concevons, à partir de M' , des droites respectivement égales à ζ , augmentée de une, deux, trois, ..., demi-longueurs d'ondes, et, appuyant l'autre extrémité de ces droites sur la surface $f_1 = 0$, décrivons des cônes qui diviseront cette surface en zones contiguës. Il est clair que les ondes sphériques dont les centres se trouvent sur une même zone enverront en M' des mouvements en partie concordants, tandis que les mouvements envoyés par deux zones voisines seront discordants. Ces zones auront une surface croissante à partir de la zone centrale, mais leur partie active n'en sera bientôt qu'une très-petite fraction, puisque sur chaque onde sphérique les vibrations n'existent qu'aux environs d'un grand cercle. Les mouvements envoyés en M' par les diverses zones augmenteraient cependant d'une zone à l'autre, à cause de la grandeur croissante de celles-ci, si l'amplitude n'était en raison inverse de la distance. Ces deux causes se compensent à peu près pour les zones situées à une distance finie de M' ; mais l'effet de celles-ci est très-faible, puisqu'elles ne sont actives, relativement à la molécule M' , que sur une très-petite fraction de leur étendue. La valeur totale des mouvements envoyés en M' , pour u , pour v et pour w , sera donc une somme de termes décroissants, alternativement positifs et négatifs, fournis chacun par une zone. Soient, pour le premier déplacement u ,

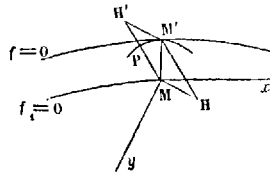
$$u', \quad u' + \Delta u', \quad u' + 2\Delta u' + \Delta\Delta u'$$

trois consécutifs de ces termes pris en valeur absolue. ζ étant assez

grand par rapport à la longueur d'onde, deux zones contiguës ont presque la même action sur la molécule M' , et les termes qu'elles donnent varient peu et avec continuité de l'un à l'autre. Ce principe peut tout au plus paraître douteux pour les zones centrales, qui sont dans une position exceptionnelle; mais nous verrons dans un instant qu'il s'étend même à celles-là. Par suite $\Delta\Delta u'$ par rapport à $\Delta u'$ et $\Delta u'$ par rapport à u' sont extrêmement petits. Comme deux termes consécutifs ont signe contraire, chacun, $u' + \Delta u'$ par exemple, peut être détruit par la moitié du précédent $\frac{u'}{2}$ et par la moitié du suivant $\frac{u'}{2} + \Delta u' + \frac{\Delta\Delta u'}{2}$, sauf erreur égale à $-\frac{\Delta\Delta' u}{2}$. On peut ainsi annuler le second terme, le quatrième, le sixième, etc., avec la moitié du premier, avec le troisième, le cinquième, etc. La somme des erreurs commises sera de l'ordre de $\Sigma\Delta\Delta u'$, ou de $\Delta u'$, c'est-à-dire négligeable. Il ne restera que la moitié du premier, plus une portion du dernier, qui est insignifiant. Par conséquent l'action totale des zones sur le mouvement de M' se réduit sensiblement à la moitié de celle de la première zone.

Prenons, à partir du point M , Mx (fig. 3), dans le sens de la vibration qui se fait en M' , pour axe des x , et la perpendiculaire My dans le plan tangent à $f_1 = 0$ pour axe des y . Les déplacements effectifs et

FIG. 3.



donnés de la molécule M' auront pour expressions, en comptant le temps à partir du commencement d'une vibration,

$$(33) \quad u = A \cos \frac{2\pi t}{\tau}, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Il faut donc démontrer que les moitiés de ceux fournis par la première zone ont les mêmes expressions.

Pour cela, décrivons, du point M comme centre, l'onde sphé-

rique $M'P$. Considérons un élément $d\sigma$ de la surface $f_1 = 0$, situé en $H(x, y)$, très-près du point M . Le rayon HM' , qui en émane, est parcouru par les ondes sphériques de la même manière et dans le même temps que le serait son égal et parallèle MH' , limité en haut à la surface $f = 0$. La vibration envoyée en M' par l'élément $d\sigma$ est donc en retard sur celle que lui envoie M , de tout le temps employé à parcourir la portion PH' de MH' , qui est hors de l'onde $M'P$. D'ailleurs, PH' étant sensiblement perpendiculaire au plan de xy , vaut $\frac{M'H'^2}{2MM'} = \frac{x^2 + y^2}{2\zeta}$; le temps employé à le parcourir sera $\frac{x^2 + y^2}{2\zeta\omega}$. Les valeurs de u, v, w , envoyées en M' par l'élément $d\sigma$, sont donc à très-peu près

$$u = \frac{A d\sigma}{\tau\omega\zeta} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{4} - \frac{x^2 + y^2}{2\zeta\omega} \right), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

En intégrant dans toute l'étendue d'une portion de la surface $f_1 = 0$, on aura les déplacements envoyés en M' par cette portion de surface. Quand celle-ci est circulaire et a pour centre M , on peut la décomposer en tranches concentriques de rayon r_1 , de largeur dr_1 et d'étendue $\pi d(r_1^2)$. L'intégrale cherchée sera, pour u ,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A}{\tau\omega\zeta} \int d(r_1^2) \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{4} - \frac{r_1^2}{2\omega\zeta} \right) \\ &= \frac{\pi A}{\tau\omega\zeta} \left[\cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \frac{\pi}{2} \right) \int \cos \frac{\pi r_1^2}{\tau\omega\zeta} d(r_1^2) \right. \\ & \quad \left. + \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \frac{\pi}{2} \right) \int \sin \frac{\pi r_1^2}{\tau\omega\zeta} d(r_1^2) \right]. \end{aligned}$$

Si l'étendue considérée est celle de la $i^{\text{ème}}$ zone, la limite inférieure de $\frac{r_1^2}{\tau\omega\zeta}$ sera $i - 1$, et la limite supérieure i . L'intégrale est donc, en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que i est impair ou est pair, $\pm 2A \cos \frac{2\pi t}{\tau}$. Ce résultat est bien le même, au signe près, pour les diverses zones voisines de la première : ce qui démontre pour ces zones le principe émis plus haut, que la différence entre les effets de deux consécutives est très-petite. Quant aux déplacements v et w ,

ils sont sensiblement nuls, et le principe s'y étend sans démonstrations. De plus, les moitiés des valeurs de u , v , w , données par la première zone, sont bien identiques à (33), ce qu'il fallait démontrer.

Les formules d'intensité que Fresnel a établies dans sa théorie de la diffraction, et qu'on trouve dans les cours de physique, découleront de notre analyse; mais celles qui donnent la phase ou l'anomalie devront être diminuées de $\frac{\pi}{2}$: cela provient de ce que, dans les ondes sphériques élémentaires, les vibrations se trouvent en avance d'un quart par rapport à celles qui sont directement données sur la première onde $f(x, y, z) = 0$.

Les mêmes raisonnements ne sont pas applicables aux ondes longitudinales; car, dans ce cas, l'amplitude des vibrations serait constante sur toute une même onde sphérique (§ III), et les zones que nous avons considérées, devenues actives dans toute leur étendue, n'auraient plus des influences décroissantes de l'une à l'autre sur les mouvements produits en M' . Il paraît donc que les formules de la diffraction ne pourraient pas être étendues aux ondes sonores.

Nous avons supposé le milieu isotrope; si c'est un corps biréfringent presque isotrope, on raisonnera de la même manière. Il y aura toutefois les différences suivantes: 1° les lignes de vibration données sur $f(x, y, z) = 0$, au lieu d'être arbitraires, seront déterminées par la nature du milieu, car les vibrations seront dirigées, aux divers points de la surface, comme dans les ondes planes tangentes à la surface en ces points; 2° on prendra la droite MM' , non pas exactement normale aux deux surfaces $f = 0$, $f_1 = 0$, mais telle que l'onde presque sphérique dont le centre est en M et qui passe par M' soit tangente en ce point à la surface $f = 0$; 3° sur cette onde, la bande très-mince sur laquelle l'amplitude n'est pas nulle ne sera généralement plus circulaire, mais elle suivra la ligne de vibration, située sur la même onde, qui est tangente en M' à la ligne de vibration directement donnée sur la surface $f = 0$ (d'après l'observation qui termine le § VII, l'erreur commise en supposant l'amplitude nulle partout ailleurs que sur cette bande, sera très-petite de l'ordre de $\tau\omega$ multiplié par le pouvoir biréfringent, et pourra être négligée dans les phéno-

mènes étudiés); 4° les zones décrites autour du point M sur $f_1 = 0$ seront telles, que les rayons menés à M' à partir des divers points de leurs contours soient parcourus par les ondes dans des temps dépassant d'un nombre entier de fois $\frac{\tau}{2}$ celui qu'elles mettent à parcourir MM'. Comme les ondes sont à peu près sphériques, les quantités telles que PH' auront sensiblement la même valeur à une même distance de M'; donc ces zones seront encore circulaires, près du point M, et, sauf la direction différente de MM', on obtiendra les mêmes résultats que pour un milieu isotrope.

