

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BOUSSINESQ

Théorie nouvelle des ondes lumineuses

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 13 (1868), p. 313-339.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13_313_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORIE NOUVELLE DES ONDES LUMINEUSES,

PAR M. BOUSSINESQ.

Présentée à l'Académie des Sciences le 5 août 1867;
voir les *Comptes rendus*, t. LXV, p. 235.

Je considère l'éther libre comme un milieu isotrope, pouvant propager des vibrations transversales d'une amplitude extrêmement petite, et la matière pondérable comme composée d'atomes nombreux, entre lesquels pénètrent ceux de l'éther. J'admets aussi qu'il se produit, pendant le mouvement vibratoire, des actions s'exerçant à de très-petites distances entre la matière pondérable et l'éther.

Les ondes lumineuses se propagent dans l'éther libre avec une rapidité immense : par conséquent, l'élasticité de ce milieu doit être presque infinie par rapport à sa densité, pour les vibrations de très-petite amplitude. D'ailleurs ces vibrations occasionnent dans la matière pondérable des changements considérables, tels que la fusion, la volatilisation, etc.; donc les actions qui s'exercent entre ces deux espèces de matière sont très-puissantes relativement à la petitesse des mouvements dont il s'agit. Mais ces actions sont-elles considérables en valeur absolue? Je ne le pense pas; car, dès que les excursions des molécules pondérables acquièrent une grandeur sensible, comme dans les ondes sonores ou dans les mouvements finis des corps, il est impossible de reconnaître expérimentalement la moindre résistance opposée à ces molécules par l'éther. On doit donc, ce me semble, considérer cet agent comme doué d'une élasticité puissante pour des vibrations de très-petite amplitude, mais admettre en même temps que ses forces élastiques cessent d'être proportionnelles aux écarts, avant que ceux-ci deviennent appréciables, et qu'elles restent toujours très-petites en valeur absolue. La petitesse de ces actions, et de celles de l'éther sur

la matière pondérable, n'empêchera pas leurs effets sur celle-ci, pourvu qu'elles soient comparables, lors de vibrations très-rapides d'une amplitude insensible, aux forces élastiques de la matière pondérable.

Cela posé, concevons un corps homogène, créé au milieu de l'éther libre en repos. S'il existe pendant le repos des actions entre ces deux espèces de matière, ce que nous ne savons pas, l'éther contenu dans l'intérieur du corps sera soumis à des actions sensiblement égales dans tous les sens, et dont la résultante sera nulle; mais celui qui se trouvera près de la surface sera comprimé ou dilaté par l'action des couches sous-jacentes de matière pondérable. D'après la pensée énoncée ci-dessus, cette action devra être extrêmement petite, et il me paraît naturel d'admettre qu'elle ne changera pas d'une manière appréciable l'état de l'éther. Si elle changeait en particulier son élasticité, on n'arriverait pas aux conditions de continuité de Cauchy, ni par suite aux lois observées de la réflexion et de la réfraction, ainsi que nous le verrons au § VIII. Nous admettrons donc que l'éther contenu dans les corps est sensiblement identique à l'éther libre. Un fait pareil se produit chez les gaz : mêlés à d'autres gaz sans action chimique sur eux, ils gardent à très-peu près la même élasticité et la même densité que s'ils étaient seuls.

Supposons actuellement qu'une onde lumineuse vienne à pénétrer dans un tel milieu. Celui-ci sera parfaitement transparent, si l'onde y continue sa marche sans s'éteindre ni se morceler à l'infini. Cela arrivera dans deux hypothèses différentes : d'abord, si le corps est tellement constitué, que les molécules pondérables restent immobiles pendant les vibrations de l'éther, et n'absorbent pas une quantité appréciable du mouvement; en deuxième lieu, si la matière pondérable y vibre en concordance avec l'éther. La première hypothèse nous paraît invraisemblable; car on ne conçoit guère comment les molécules pondérables pourraient, dans un milieu agité, rester immobiles et n'absorber qu'une fraction insensible du mouvement. Nous admettrons la seconde, qui nous expliquera très-simplement, avec toutes leurs lois observées, la dispersion, la polarisation rotatoire, la double réfraction rectiligne et elliptique, la réflexion et la réfraction.

Un corps imparfaitement transparent sera au contraire celui qui, ne pouvant vibrer complètement à l'unisson de son éther, brisera sans

cesse et morcellera à l'infini les ondes qui se propageront à son intérieur. Il donnera ainsi naissance à de nouveaux mouvements vibratoires, dont la longueur d'onde pourra n'être pas la même que celle des premiers.

Si le morcellement est tellement rapide, que toute onde de force moyenne soit anéantie avant d'avoir parcouru un espace sensible, le corps sera opaque ou athermane. La force vive ne se perdra pas pour cela, mais elle passera sans cesse dans de nouvelles ondes produites de proche en proche : la conductibilité sera justement cette propriété qu'aura le corps de propager lentement dans son intérieur, sous forme d'ondes toujours nouvelles d'une étendue infiniment petite, la force vive qu'il aura reçue. Celle-ci s'accumulera dans le corps, car il en arrivera sans cesse de nouvelles quantités avant que les premières aient pu sortir; l'agitation des molécules augmentera donc, et produira divers effets qui constituent l'échauffement. J'espère montrer dans un autre Mémoire que, de ce point de vue, on arrive aisément aux équations de la température et à l'explication des principaux phénomènes physiques et dynamiques de la chaleur; ici je me bornerai à l'étude des ondes lumineuses.

§ I. — Équations des mouvements vibratoires.

Quand nous disons que les vibrations très-petites de la matière pondérable, dans les corps transparents, sont concordantes avec celles de l'éther, nous entendons que, dans les mouvements périodiques de faible amplitude, la position des molécules pondérables dépend à chaque instant de celle des molécules d'éther qui les environnent, et ne dépend pas d'autre chose. Prenons un système de coordonnées rectangulaires des x, y, z . En un point (x, y, z) du milieu, et tout autour dans une très-petite étendue, la position des molécules d'éther est définie : à une première approximation, par les déplacements suivant les axes (u, v, w) de la molécule d'éther M dont les coordonnées d'équilibre sont x, y, z ; à la deuxième approximation, par les dérivées premières $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$; à la troisième, par les dérivées secondes $\frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z) d(x, y, z)}$, etc. En

effet, si $x + h$, $y + k$, $z + l$ sont les coordonnées d'équilibre d'une seconde molécule d'éther M' , voisine de M , son déplacement suivant l'axe des x sera

$$u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \frac{d^2u}{dy^2}k^2 + \frac{d^2u}{dz^2}l^2 + 2 \frac{d^2u}{dydz}kl + 2 \frac{d^2u}{dzdx}lh + 2 \frac{d^2u}{dxdy}hk \right) + \dots$$

On voit qu'il ne varie qu'avec u et ses dérivées partielles des divers ordres en x, y, z . Comme il en serait de même pour les déplacements suivant les autres axes, et pour toutes les autres molécules voisines de M , l'état de l'éther est parfaitement déterminé, dans un petit espace autour de chaque point, par les valeurs qu'ont en ce point u, v, w et leurs dérivées partielles en x, y, z . Les déplacements suivant les axes u_1, v_1, w_1 de la molécule pondérable dont la position d'équilibre est (x, y, z) , ne dépendent que de cet état, et seront fonctions des mêmes variables. On aura ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} u_1, v_1, w_1 = \text{des fonctions de } u, v, w, \text{ de } \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}, \\ \text{de } \frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)d(x, y, z)}, \dots \end{cases}$$

Pour u, v, w assez petits, les expressions de u_1, v_1, w_1 pourront être développées par la série de Maclaurin, et, lors des ondes lumineuses, on pourra ne garder que les termes du premier degré.

Les termes en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ seraient négligeables par rapport à ceux en u, v, w , si la longueur d'onde n'était pas très-petite; mais, comme elle l'est, et que ces termes la contiendront en dénominateur, ils pourront avoir une valeur sensible. Il en est de même des termes en $\frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)d(x, y, z)}$. Nous nous arrêterons généralement à ces derniers : les résultats ainsi obtenus seront suffisamment approchés dans la plupart des cas.

Cela posé, cherchons les équations du mouvement de l'éther. Celui-ci étant supposé sensiblement identique à l'éther libre, et par con-

séquent isotrope comme lui, ses actions élastiques donneront suivant l'axe des x , sur un volume très-petit ϖ comprenant la molécule M, une composante de la forme

$$\varpi \left[(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u \right];$$

θ désigne la dilatation $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$, Δ_2 désigne le symbole $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, enfin λ et μ sont les deux coefficients d'élasticité de l'éther (voir LAMÉ, *Leçons sur l'élasticité*, § 26).

Les forces élastiques de la matière pondérable, développées pendant les mouvements de très-petite amplitude qui constituent les ondes lumineuses, sont trop peu considérables pour produire un effet sensible [*].

Mais il n'en est pas ainsi des actions réciproques de la matière pondérable et de l'éther : ce sont elles en effet qui produisent les vibrations de l'une et modifient celles de l'autre. Bien que ces forces nous soient inconnues, il est naturel de penser que leur effet le plus grand et sensible provient d'une espèce de frottement entre les molécules d'éther et celles de la matière pondérable, qui passent très-près les unes des autres sans avoir une vitesse commune. Par suite, l'accélération des molécules pondérables contenues dans le volume ϖ est due à l'éther de ce volume, et leur force motrice est égale et contraire à leur action sur cet éther. En désignant par ρ , la densité de la

[*] En effet, les forces élastiques exercées sur l'élément de volume ϖ d'éther sont du même ordre de grandeur que les produits de $\varpi\lambda$, $\varpi\mu$ par les déplacements u , v , w : si nous appelons ρ la densité de l'éther, ω_0^2 le carré de la vitesse de propagation des ondes transversales dans l'éther libre, carré égal à $\frac{\mu}{\rho}$, et m la quantité de mouvement que possède l'élément, elles seront de même ordre que le produit $\omega_0^2 m$. De même, les forces élastiques exercées sur un élément égal de volume de matière pondérable seront du même ordre que $\omega_1^2 m_1$, ω_1 étant la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans ce milieu, et m_1 la quantité de mouvement que possède l'élément considéré. Lors des ondes lumineuses, ce dernier produit $\omega_1^2 m_1$ est bien négligeable à côté de $\omega_0^2 m$; car m et m_1 sont comparables, tandis que ω_1 est comme nul par rapport à ω_0 .

matière pondérable, cette action aura pour composante, suivant l'axe des x , $-\rho_1 \varpi \frac{d^2 u_1}{dt^2} : \frac{d^2 u_1}{dt^2}$ y représente l'accélération suivant l'axe des x de la molécule pondérable qui se trouve actuellement avec la molécule M d'éther; mais, tous les déplacements étant extrêmement petits, cette accélération ne diffère pas d'une manière appréciable de celle de la molécule pondérable dont les coordonnées d'équilibre sont x, y, z , et nous pourrons y remplacer u_1 par son expression (1).

Si nous appelons ρ la densité de l'éther, la composante motrice $\rho \varpi \frac{d^2 u}{dt^2}$ du volume ϖ d'éther sera égale à

$$\varpi \left[(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u \right] - \rho_1 \varpi \frac{d^2 u_1}{dt^2}.$$

De là résulte la première équation du mouvement, à laquelle les deux autres seraient analogues :

$$(2) \quad (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u - \rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

On substituera à u_1 , dans le premier membre, son expression suivant les premières puissances de u, v, w , et de leurs dérivées en x, y, z .

Nous allons étudier la forme de u_1, v_1, w_1 , et les vibrations correspondantes de l'éther, dans les milieux isotropes, et dans ceux qui diffèrent peu d'être isotropes et d'être symétriques.

Nous appelons *ici* milieu *isotrope* celui dont les équations de mouvement ne changent pas, lorsqu'on fait tourner d'une manière quelconque autour de l'origine les axes des coordonnées, en les laissant toujours rectangulaires et de même sens relatif.

Nous appelons *symétrique* tout milieu dont les équations de mouvement, pour un certain système de coordonnées rectangulaires, restent les mêmes, lorsqu'on change en son opposée la direction d'un quelconque des axes. Enfin quand un milieu ne sera symétrique par rapport à aucun système de plans coordonnés rectangulaires, nous l'appellerons *dissymétrique*.

Il est clair d'après cela qu'un milieu isotrope sera symétrique lorsque, sans changer ses équations de mouvement, on pourra disposer les

axes de toutes les manières, pourvu qu'on maintienne leur rectangularité; et qu'il sera au contraire dissymétrique, si on peut seulement les faire tourner d'une manière arbitraire autour de l'origine. Les milieux habituellement appelés isotropes seront, *dans ce Mémoire*, désignés sous le nom d'*isotropes-symétriques*; les liquides doués d'un pouvoir rotatoire sont au contraire *isotropes-dissymétriques*.

Les milieux presque isotropes et presque symétriques dont nous nous occuperons, auront des équations de mouvement peu différentes pour les divers systèmes d'axes rectangulaires de même sens relatif, et, parmi ces systèmes, en admettront un pour lequel ils différeront, bien moins que pour tous les autres, d'être symétriques. Tels sont tous les cristaux transparents observés jusqu'à ce jour.

§ II. — *Formules de u , v , w , dans les milieux isotropes.*

Dans un milieu isotrope, les expressions de u , v , w seront les mêmes pour tout système d'axes rectangulaires de même sens relatif. Par exemple, l'expression de u , ne devra pas changer : si l'on change à la fois x en $-x$, y en $-y$, u en $-u$, v en $-v$, w en $-w$; ou bien x en $-x$, z en $-z$, u en $-u$, w en $-w$, v en $-v$; ou encore y en $-y$, z en $-z$, v en $-v$, w en $-w$. En effet, tous ces changements reviennent à faire tourner d'une demi-circonférence le système de deux axes autour du troisième. Après cette première réduction, il ne restera plus dans l'expression de u , que les termes en

$$u, \frac{dv}{dz}, \frac{dv}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, \frac{d^2v}{dx dy}, \frac{d^2w}{dx dz},$$

si l'on s'arrête aux dérivées du second ordre.

On peut aussi permuer entre eux deux des axes, pourvu qu'on change en même temps en son opposée la direction du troisième, par exemple, transformer y en z , v en w , et z en y , w en v , pourvu qu'on change en même temps x en $-x$, u en $-u$, v en $-v$. On reconnaît ainsi que les coefficients de $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dv}{dy}$ sont égaux en valeur absolue, mais de signe contraire, tandis que ceux de $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2v}{dx dy}$ sont respective-

ment égaux à ceux de $\frac{d^2 u}{dz^2}$, $\frac{d^2 v}{dx dz}$. L'expression de u_1 est donc de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = A u + B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 u + E \frac{d^2 u}{dx^2}, \\ \text{en changeant respectivement les axes des } x, \text{ des } y, \text{ des } z, \text{ en} \\ \text{ceux des } y, \text{ des } z, \text{ des } x, \text{ on en déduit} \\ v_1 = A v + B \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} \right) + C \frac{d\theta}{dy} + D \Delta_2 v + E \frac{d^2 v}{dy^2}, \\ \text{et de même} \\ w_1 = A w + B \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right) + C \frac{d\theta}{dz} + D \Delta_2 w + E \frac{d^2 w}{dz^2}. \end{cases}$$

Supposons actuellement qu'on fasse tourner, autour de l'axe des z , les deux axes des x et des y d'un angle infiniment petit ϵ . Soient x' , y' , z' ; u' , v' , w' ; u'_1 , v'_1 , w'_1 , les coordonnées d'équilibre et les déplacements, dans le nouveau système d'axes infiniment voisin du premier, des molécules dont x , y , z ; u , v , w ; u_1 , v_1 , w_1 sont les coordonnées et les déplacements pareils dans le système primitif. Nous aurons les formules de transformation

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'} - \epsilon \frac{d}{dy'}, & \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy'} + \epsilon \frac{d}{dx'}, & \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'}; \\ u = u' - \epsilon v', & v = v' + \epsilon u', & w = w'; \\ u_1 = u'_1 - \epsilon v'_1, & v_1 = v'_1 + \epsilon u'_1, & w_1 = w'_1. \end{cases}$$

Tirons de ces formules les expressions de u_1 , v_1 , w_1 , et celles de u , v , w et de leurs dérivées partielles en x , y , z , en fonction des quantités pareilles relatives aux nouveaux axes, puis portons-les dans les relations (3). Il faudra et il suffira que les termes en ϵ aient somme égale dans les deux membres de chacune de ces relations, pour que le milieu soit isotrope autour de l'axe des z . On trouve pour cela la condition nécessaire et suffisante $E = 0$. Il est clair que l'isotropie autour des autres axes des coordonnées, et, par suite, l'isotropie absolue du milieu, donnera la même condition. Donc les expressions définitives de u_1 , v_1 , w_1 s'obtiendront en faisant, dans les relations (3), $E = 0$.

Si le milieu est isotrope-symétrique, ces relations subiront une nouvelle réduction. La première d'entre elles ne devra changer, ni par

les transformations de x en $-x$, u en $-u$, u_1 en $-u_1$, ni par celles de y en $-y$, v en $-v$, ni par celles de z en $-z$, w en $-w$. On devra donc poser $B=0$, et il n'y aura plus de terme contenant les dérivées premières de u , v , w .

§ III. — *Dispersion et polarisation rotatoire : lois approchées.*

Nous pouvons maintenant étudier les vibrations de l'éther dans les milieux isotropes. Portons la valeur approchée de u , dans l'équation (2), et celle-ci deviendra

$$(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u - \rho_1 \frac{d^2}{dt^2} \left[A u + B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 u \right] = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Prenons les intégrales simples de cette équation et des deux autres pareilles, sous la forme

$$(5) \quad \begin{cases} u = M e^{\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} \right) \sqrt{-1}}, \\ v = N e^{\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} \right) \sqrt{-1}}, \\ w = P e^{\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega} \right) \sqrt{-1}}; \end{cases}$$

m, n, p sont les cosinus des angles que fait avec les axes une direction quelconque, τ et ω deux constantes réelles, enfin M, N, P trois coefficients généralement imaginaires. Il est clair que les parties réelles de u, v, w vérifieront séparément les équations du mouvement : elles représenteront des ondes planes, perpendiculaires à la direction (m, n, p) , ayant ω pour vitesse de propagation, et $\tau\omega$ pour longueur d'onde ou τ pour durée de la vibration.

Observons que

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 u \right] = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \left[B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 u \right],$$

et la première équation du mouvement deviendra

$$(6) \quad \begin{cases} \left(\lambda + \mu + \frac{4C\pi^2\rho_1}{\tau^2} \right) \frac{d\theta}{dx} + \left(\mu + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\tau^2} \right) \Delta_2 u + \frac{4B\pi^2\rho_1}{\tau^2} \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) \\ = (\rho + \rho_1 A) \frac{d^2 u}{dt^2}. \end{cases}$$

Supposons pour un instant que le milieu soit isotrope-symétrique, ou que $B = 0$. On voit qu'il se comportera comme un corps homogène d'élasticité constante, qui aurait pour densité $\rho + \rho_1 A$, et pour coefficients d'élasticité ceux de l'éther, augmentés chacun d'un terme très-petit inversement proportionnel à τ^2 . Les carrés des vitesses de propagation des ondes longitudinales et des ondes transversales seront respectivement (voir LAMÉ, *Leçons sur l'élasticité*, § 59)

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho + \rho_1 A} \left[1 + \frac{4(C+D)\pi^2 \rho_1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\tau^2} \right], \quad \frac{\mu}{\rho + \rho_1 A} \left(1 + \frac{4D\pi^2 \rho_1}{\mu} \frac{1}{\tau^2} \right).$$

Ces vitesses varient avec τ conformément à la formule approchée que l'expérience a donnée pour les ondes transversales. On a reconnu ainsi que le coefficient D est négatif, ou que la vitesse de propagation augmente avec la longueur d'onde. Toutefois il doit être positif pour la vapeur d'iode; car, dans cette vapeur, la vitesse de propagation diminue avec la longueur d'onde.

Quant à A , sa signification dans les formules (3) montre qu'il est essentiellement positif. En effet, l'éther doit entraîner les molécules pondérables dans le sens suivant lequel il se meut lui-même. Par suite, ce coefficient a pour effet de rendre les vitesses de propagation des ondes plus petites dans l'éther des corps que dans l'éther libre : ce qui est encore conforme à l'expérience.

Revenons au cas général de B quelconque, et posons, afin d'abréger,

$$(7) \quad \frac{\lambda + \mu + \frac{4\pi^2 C \rho_1}{\tau^2}}{\rho + \rho_1 A} = K, \quad \frac{\mu + \frac{4\pi^2 D \rho_1}{\tau^2}}{\rho + \rho_1 A} = L, \quad \frac{\rho_1 B}{\rho + \rho_1 A} = k,$$

Nous pouvons supposer, à cause de l'isotropie, que le plan des xy ait été pris parallèle aux ondes, ou que l'on ait $m = 0, n = 0, p = 1$. Alors les valeurs (5) de u, v, w ne varient qu'avec z et t , et changent les trois équations du mouvement en

$$(8) \quad \begin{cases} \left(\frac{L}{\omega^2} - 1 \right) M + \frac{2\pi k}{\tau \omega} N \sqrt{-1} = 0, \\ \left(\frac{L}{\omega^2} - 1 \right) N - \frac{2\pi k}{\tau \omega} M \sqrt{-1} = 0, \\ \left(\frac{K+L}{\omega^2} - 1 \right) P = 0, \end{cases}$$

Ajoutons les deux premières de ces équations, après les avoir respectivement multipliées par N et par $-M$. Elles donneront

$$(9) \quad \begin{cases} k(M^2 + N^2) = 0 & \text{ou} & N = \pm M\sqrt{-1}, \\ \text{et ensuite} & \left(\frac{L}{\omega^2} - 1 \mp \frac{2\pi k}{\tau\omega}\right) M = 0. \end{cases}$$

On satisfait à la troisième (8) en faisant, soit $\omega^2 = K + L$, soit $P = 0$.

Dans le premier cas, les relations (9) donnent $M = 0$, $N = 0$: les vibrations sont longitudinales, et les ondes se propagent avec la même vitesse $\sqrt{K + L}$ que si B était nul, ou que le milieu fût symétrique.

Dans le second cas, les vibrations sont transversales, c'est-à-dire se font dans les plans des ondes. La deuxième relation (9) donne

$$\omega = \mp \frac{\pi k}{\tau} + \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{\tau^2} + L};$$

le radical doit toujours être pris positif, car, avec le signe $-$, il donnerait pour ω des valeurs négatives.

Appelons ω_1 , ω_2 les deux racines, la première correspondant au signe $+$, et à $N = -M\sqrt{-1}$. Si nous prenons $M = Ie^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, I et φ_1 étant réels, les parties réelles de u , v , ou les déplacements correspondants à cette première racine, seront

$$u = I \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_1} + \varphi_1 \right), \quad v = I \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_1} + \varphi_1 \right).$$

La courbe décrite par chaque molécule est le cercle $u^2 + v^2 = I^2$: il est parcouru dans le sens direct, c'est-à-dire en allant de l'axe des x vers celui des y .

Appelons φ_2 une autre constante, et les déplacements correspondants à la seconde valeur de ω seront

$$u = I \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_2} + \varphi_2 \right), \quad v = -I \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega_2} + \varphi_2 \right).$$

La trajectoire est encore un cercle, mais décrit en sens inverse du premier.

Si l'on veut avoir des vibrations rectilignes, on n'a qu'à prendre la somme de ces deux intégrales. On trouve ainsi, pour nouvelles valeurs des déplacements,

$$u = 2I \cos \frac{\pi}{\tau} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2} z + \varphi_1 - \varphi_2 \right) \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_1 \omega_2} z + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right),$$

$$v = 2I \sin \frac{\pi}{\tau} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2} z + \varphi_1 - \varphi_2 \right) \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_1 \omega_2} z + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right).$$

L'angle que fait la vibration avec l'axe de x est

$$\psi = \frac{\pi}{\tau} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2} z + \varphi_1 - \varphi_2 \right) = \frac{2\pi^2 k}{L\tau^2} z + \text{const.}$$

A mesure que l'onde avance suivant l'axe des z , le plan de polarisation tourne, dans le sens de la vibration circulaire dont la vitesse de propagation est la plus grande, d'un angle qui varie proportionnellement au chemin parcouru, et à peu près en raison inverse de τ^2 ou du carré de la longueur d'onde : cette dernière loi approximative a été trouvée expérimentalement par M. Biot.

La vitesse de l'onde est

$$\frac{2\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{L}{\sqrt{L + \frac{\pi^2 k^2}{\tau^2}}}:$$

elle se réduit, sauf erreur du second ordre, à $\sqrt{L}$, lorsque k est très-petit : c'est ce qui arrive chez tous les corps.

§ IV. — *Lois plus exactes.*

Il est aisé d'obtenir pour chaque onde en particulier, dans le cas d'un milieu isotrope, l'expression aussi approchée qu'on voudra de u , v , w , et par suite les formules de la dispersion et de la polarisation rotatoire. Il suffit de prendre, comme au paragraphe précédent, le plan des xy parallèle aux ondes. Alors u , v , w ne dépendent que de z et de t . Les termes contenant les dérivées d'ordre n , qui entrent dans l'expression de u , seront tout au plus au nombre de trois, savoir $\frac{d^n u}{dz^n}$, $\frac{d^n v}{dz^n}$, $\frac{d^n w}{dz^n}$.

Mais les remarques faites au commencement du § II les réduiront encore : si n est pair, il ne restera que le terme en $\frac{d^n u}{dz^n}$; si n est impair, il ne restera que celui en $\frac{d^n v}{dz^n}$. De même, l'expression de v , ne contiendra pas d'autre terme d'ordre n que celui en $\frac{d^n v}{dz^n}$ si n est pair, et celui en $\frac{d^n u}{dz^n}$ si n est impair. Ces termes auront même coefficient dans u , et dans v , pour n pair, et des coefficients égaux, mais de signe contraire, pour n impair; car, si l'on échange entre eux les deux axes des x et des y en changeant en même temps z en $-z$, la formule de u , deviendra celle de v , et réciproquement. Quant à la formule de w , elle ne contient pas de terme d'ordre n si n est impair, et elle contient seulement le terme en $\frac{d^n w}{dz^n}$ si n est pair. Les expressions de u , v , w , seront donc de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} u = Qu + R \frac{dv}{dz} + Q' \frac{d^2 u}{dz^2} + R' \frac{d^3 v}{dz^3} + Q'' \frac{d^4 u}{dz^4} + \dots, \\ v = Qv - R \frac{du}{dz} + Q' \frac{d^2 v}{dz^2} - R' \frac{d^3 u}{dz^3} + Q'' \frac{d^4 v}{dz^4} - \dots, \\ w = Sw + S' \frac{d^2 w}{dz^2} + S'' \frac{d^4 w}{dz^4} + \dots \end{cases}$$

D'ailleurs, les divers coefficients $Q, Q', Q'', \dots, R, R', \dots, S, S', \dots$ seront arbitraires, excepté S qui, nous le savons, est égal à Q . En effet on reconnaît aisément, par les formules (3) où $E = 0$, et en observant que l'expression symbolique Δ_2 reste la même dans tous les systèmes de coordonnées rectangulaires, que les formules suivantes sont isotropes, quels que soit leurs coefficients :

$$\begin{aligned} u &= Qu + R \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + Q' \Delta_2 u + (S' - Q') \frac{d\theta}{dx} + R' \Delta_2 \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) \\ &\quad + Q'' \Delta_2 \Delta_2 u + (S'' - Q'') \Delta_2 \frac{d\theta}{dx} + R'' \Delta_2 \Delta_2 \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + \dots, \\ v &= Qv + R \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} \right) + Q' \Delta_2 v + (S' - Q') \frac{d\theta}{dy} + R' \Delta_2 \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} \right) \\ &\quad + Q'' \Delta_2 \Delta_2 v + (S'' - Q'') \Delta_2 \frac{d\theta}{dy} + \dots, \end{aligned}$$

$$w_1 = Qw + R \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right) + Q' \Delta_2 w + (S' - Q') \frac{d\theta}{dz} + R' \Delta_2 \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right) \\ + Q'' \Delta_2 \Delta_2 w + (S'' - Q'') \Delta_2 \frac{d\theta}{dz} + \dots$$

Or, si on y suppose u, v, w indépendants de x et de y , ces formules deviennent identiques à (10), pourvu que la condition $S = Q$ soit vérifiée.

Portons dans (10) les expressions de u, v, w données par

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{\omega} \right) \sqrt{-1}},$$

et observons que

$$\frac{d^3 u}{dz^3} = -\frac{4\pi^3}{\tau^3 \omega^3} \frac{du}{dz}, \quad \frac{d^5 u}{dz^5} = \frac{16\pi^5}{\tau^5 \omega^5} \frac{du}{dz}, \dots; \quad \frac{d^4 u}{dz^4} = -\frac{4\pi^4}{\tau^4 \omega^4} \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad \frac{d^6 u}{dz^6} = \frac{16\pi^6}{\tau^6 \omega^6} \frac{d^2 u}{dz^2}, \dots$$

Les déplacements u_1, v_1, w_1 prendront la forme qu'ils avaient au paragraphe précédent, dans le cas d'une onde perpendiculaire à l'axe des z ,

$$(10 \text{ bis}) \quad \begin{cases} u_1 = Au + B \frac{dv}{dz} + D \frac{d^2 u}{dz^2}, & v_1 = Av - B \frac{du}{dz} + D \frac{d^2 v}{dz^2}, \\ w_1 = Aw + (C + D) \frac{d^2 w}{dz^2}, \end{cases}$$

On aura donc toutes les formules du paragraphe précédent à partir de (7); seulement B, C, D seront ici des séries rapidement convergentes, ordonnées suivant les puissances négatives de $\tau^2 \omega^2$.

Si le milieu est légèrement dissymétrique, la formule qui termine le paragraphe précédent donne, pour calculer le carré de la vitesse de propagation des ondes transversales à vibrations rectilignes, l'équation

$$\omega^2 = L, \quad \text{ou bien} \quad \omega^2 = \frac{\mu + \frac{4\pi^2 \rho_1}{\tau^2} D}{\rho + \rho_1 A}.$$

De cette équation où D est une série rapidement convergente ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2 \omega^2$, on tirera par approxi-

mations successives la valeur de ω^2 , sous la forme

$$(11) \quad \omega^2 = e \left(1 + \frac{e'}{\tau^2} + \frac{e''}{\tau^4} + \dots \right).$$

C'est la formule générale de la dispersion dans les corps isotropes, c'est-à-dire celle qui donne, en fonction de la longueur d'onde ou de la durée de la vibration, la vitesse de propagation des ondes.

L'angle ψ dont tourne le plan de polarisation sera, sauf une constante,

$$\psi = \frac{2\pi^2 k}{L\tau^2} z = \frac{2\pi^2}{\omega^2 \tau^2} \frac{\rho_1 B}{\rho + \rho_1 A} z.$$

En substituant à B la série que représente cette quantité, et puis à ω^2 sa valeur (11), l'angle ψ pourra être développé en série de la forme

$$(12) \quad \psi = \frac{f}{\tau^2} \left(1 + \frac{f'}{\tau^2} + \frac{f''}{\tau^4} + \dots \right) z.$$

Tous les coefficients $e, e', e'', \dots, f, f', f''$ sont indépendants.

Si nous prenons dans ψ deux termes seulement, et que, supposant f' négatif, nous mettons le signe en évidence, nous aurons

$$\psi = \frac{f}{\tau^2} \left(1 - \frac{f'}{\tau^2} \right) z.$$

L'angle dont tourne le plan de polarisation ne variera plus, comme au paragraphe précédent, en raison inverse du carré de la longueur d'onde : mais il s'annulera, en changeant de signe, pour $\tau^2 = f'$, et sa valeur absolue deviendra maxima pour $\tau^2 = 2f'$. C'est ce qui arrive, comme M. Biot l'a reconnu, dans des dissolutions d'acide tartrique [*].

[*] Les expressions (10) de u_1, v_1, w_1 ne conviennent pas seulement au cas d'un milieu isotrope autour d'un axe pris pour celui des z ; elles conviennent aussi au cas d'un cristal à un seul axe optique, pour l'onde normale à cet axe.

En effet, les cristaux à un axe ont pour type, soit le prisme droit à base carrée, soit le prisme droit à base hexagonale régulière. L'axe des z étant celui du prisme, on peut adopter deux axes rectangulaires des x et des y , le premier perpendiculaire sur le milieu d'un côté du carré ou de l'hexagone, le second perpendiculaire à un autre côté

§ V. — *Double réfraction rectiligne.*

Considérons actuellement un milieu presque isotrope et presque symétrique : ce qui est le cas des cristaux naturels au point de vue des ondes lumineuses.

Les valeurs de u_1 , v_1 , w_1 , dans un milieu rapporté à trois points plans coordonnés de symétrie, doivent satisfaire à la condition de ne pas changer de forme, lorsqu'on change arbitrairement en son opposée la direction d'un quelconque des axes. Si l'on s'arrête aux dérivées du second ordre, cette condition revient à dire que u_1 contient seulement les termes en u , $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2v}{dx dy}$, $\frac{d^2w}{dx dz}$.

Le milieu proposé étant presque isotrope, u_1 , v_1 , w_1 y ont la forme (3) avec $E = 0$, sauf erreur très-petite, et cela dans tous les systèmes d'axes rectangulaires de même sens relatif. Mais de plus, pour un système particulier d'axes, le milieu est presque symétrique, c'est-à-dire se rapproche incomparablement plus d'être symétrique que pour tout autre système. Cela fait que, dans u_1 , à part les termes en u , $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2v}{dx dy}$, $\frac{d^2w}{dx dz}$, tous les autres auront avec ce système d'axes des coefficients incomparablement plus petits que ceux qu'ils

du carré ou passant par un sommet de l'hexagone. Si l'on fait tourner de 180 degrés le système de deux quelconques des axes autour du troisième, les nouveaux axes seront par rapport au cristal dans une position semblable à celle des premiers, et les formules de u_1 , v_1 , w_1 n'auront pas changé. Donc, pour l'onde perpendiculaire aux z , ces quantités auront des expressions de la forme

$$(a) \quad \begin{cases} u_1 = Qu + R \frac{dv}{dz} + Q' \frac{d^2u}{dz^2} + R' \frac{d^3v}{dz^3} + Q'' \frac{d^4u}{dz^4} + \dots, \\ v_1 = Q_1 v + R_1 \frac{du}{dz} + Q'_1 \frac{d^2v}{dz^2} + R'_1 \frac{d^3u}{dz^3} + Q''_1 \frac{d^4v}{dz^4} + \dots, \\ w_1 = Sw + S' \frac{d^2w}{dz^2} + S'' \frac{d^4w}{dz^4} + \dots \end{cases}$$

Actuellement faisons tourner, dans le plan des xy , les deux axes des x et des y , d'un angle α égal à 90 ou à 60 degrés, de manière à obtenir deux nouveaux axes des x' et des y' disposés par rapport au cristal dans une position analogue à celle des

avaient avec les autres systèmes. En convenant de négliger ceux d'entre eux qui étaient déjà très-petits dans tout système d'axes, il ne restera que le terme $B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right)$. Quant aux termes en $u, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, \frac{d^2v}{dx dy}, \frac{d^2w}{dx dz}$, ils pourront avoir respectivement des coefficients qui diffèrent de A, D + C, D, D, C, C de quantités très-petites par rapport à A, D, C eux-mêmes. Ceux qui contiennent les dérivées secondes, influant déjà assez peu sur le mouvement, peuvent être supposés les mêmes que dans le cas de l'isotropie. Donc le terme en u aura seul, outre la partie isotrope Au , une partie très-petite $A\alpha u$.

premiers. Soient u', v', u'_1, v'_1 les déplacements des molécules par rapport au nouveau système des x' et des y' . Nous aurons les formules de transformation

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \alpha - v' \sin \alpha, \\ v &= u' \sin \alpha + v' \cos \alpha; \\ u_1 &= u'_1 \cos \alpha - v'_1 \sin \alpha, \\ v_1 &= u'_1 \sin \alpha + v'_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ces valeurs de u, v, u_1, v_1 , portées dans les deux premières relations (α), les changent en

$$\begin{aligned} \left(u'_1 - Q u' - R \frac{dv'}{dz} - \dots \right) \cos \alpha - \left(v'_1 - Q v' + R \frac{du'}{dz} - \dots \right) \sin \alpha &= 0, \\ \left(u'_1 - Q_1 u' + R_1 \frac{dv'}{dz} - \dots \right) \sin \alpha + \left(v'_1 - Q_1 v' - R_1 \frac{du'}{dz} - \dots \right) \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de $\cos \alpha$ sont nuls identiquement, car u'_1, v'_1 doivent avoir les mêmes expressions que u_1, v_1 ; donc, $\sin \alpha$ n'étant pas nul, ses deux coefficients doivent l'être, et, comparés à ceux de $\cos \alpha$, ils donnent

$$Q_1 = Q, \quad R_1 = -R, \dots;$$

ce qui identifie les relations (α) aux formules (10).

Il en résulte que les cristaux à un axe se comportent, pour l'onde normale à l'axe, comme les milieux isotropes, et que toutes les formules de la dispersion et de la polarisation rotatoire établies ci-dessus leur sont applicables. Seulement les deux coefficients Q, S ne sont plus égaux : mais cela n'influe en rien sur les ondes transversales.

Les expressions de u_1 , v_1 , w_1 seront ainsi

$$(13) \quad \begin{cases} u_1 = A(1 + \alpha)u + B\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + C\frac{d\theta}{dx} + D\Delta_2 u, \\ v_1 = A(1 + \beta)v + B\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + C\frac{d\theta}{dy} + D\Delta_2 v, \\ w_1 = A(1 + \gamma)w + B\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + C\frac{d\theta}{dz} + D\Delta_2 w; \end{cases}$$

les coefficients α , β , γ , B sont très-petits.

Si nous rappelons que, dans le cas d'un mouvement vibratoire,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 u \right] = - \frac{4\pi^2}{\tau^2} \left[B \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right) + C \frac{d\theta}{dx} + D \Delta_2 u \right],$$

et si nous adoptons, afin d'abrégier, les notations (7), et celles-ci,

$$(14) \quad - \frac{\rho_1 A \alpha}{\rho + \rho_1 A} = a, \quad - \frac{\rho_1 A \beta}{\rho + \rho_1 A} = b, \quad - \frac{\rho_1 A \gamma}{\rho + \rho_1 A} = c,$$

la valeur de u_1 , portée dans (2), donnera la première des trois équations du mouvement

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = K(1 + a) \frac{d\theta}{dx} + L(1 + a) \Delta_2 u + \frac{4\pi^2}{\tau^2} k \left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \right), \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = K(1 + b) \frac{d\theta}{dy} + L(1 + b) \Delta_2 v + \frac{4\pi^2}{\tau^2} k \left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} \right), \\ \frac{d^2 w}{dt^2} = K(1 + c) \frac{d\theta}{dz} + L(1 + c) \Delta_2 w + \frac{4\pi^2}{\tau^2} k \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right). \end{cases}$$

Nous supposerons qu'on ait choisi les axes de telle sorte que b soit compris entre a et c . Cela n'empêche pas de les prendre de sens déterminé, de prendre par exemple l'axe des y à droite de celui des x , pour un observateur qui aurait les pieds à l'origine et la tête du côté des z positifs : il suffit pour cela de changer, si c'est nécessaire, un des axes en son prolongement.

Dans tous les corps biréfringents connus, la quantité k est si petite, qu'on peut la négliger à une première approximation, et qu'il a même été le plus souvent impossible de constater son existence. Si nous fai-

sons $k = 0$, les équations (15) seront un cas particulier des équations (8) étudiées dans notre Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés [*]. Il suffira, pour les leur identifier, de poser dans ces équations (8),

$$(15 \text{ bis}) \quad \lambda' = \lambda = K, \quad \mu = \rho = L, \quad \sigma = 0, \quad \nu = 0.$$

On aura ainsi la théorie de la double réfraction rectiligne de Fresnel, puisque $\sigma = 0$ (voir § VIII du Mémoire cité); mais les vibrations ne seront qu'à peu près transversales, et non pas rigoureusement comme le supposait Fresnel.

Les coefficients K , L contiennent la longueur d'onde, et donnent la partie principale de la dispersion; cette partie est la même que pour un corps isotrope. Si on voulait connaître l'autre partie, il faudrait pousser plus loin l'approximation.

Lorsqu'on s'arrête aux termes du même ordre de grandeur que a , b , c , nous avons vu, au § IX du Mémoire cité, que la direction des axes optiques est évaluée avec une erreur du premier ordre. Donc, si l'on construisait l'onde exacte, la direction d'un même axe optique serait généralement variable avec la longueur d'onde d'une quantité assez petite, mais sensible; ce fait constitue la dispersion des axes optiques.

§ VI. — Double réfraction elliptique.

Voyons maintenant quelle peut être, dans les équations (15), l'influence des termes en k sur une onde plane de direction quelconque.

Si ces termes étaient nuls, une onde plane de direction quelconque pourrait correspondre à trois vibrations rectilignes sensiblement rectangulaires : deux quasi-transversales, une quasi-longitudinale (voir les §§ II, III, IV du Mémoire cité). Prenons de nouveaux axes rectangulaires disposés dans le même sens relatif que les premiers; choisissons ceux des x' et des y' parallèles aux ondes, et faisant avec les vibrations quasi-transversales des angles aussi petits ou aussi voisins de deux droits que possible, et prenons l'axe des z' dans le sens suivant

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2^e série, t. XIII, p. 221.

lequel marchent les ondes ; ce dernier fera par conséquent un angle très-petit avec la vibration quasi-longitudinale. L'onde sera parallèle au plan des $x'y'$, et les déplacements u' , v' , w' , pris dans le même système d'axes, dépendront seulement de z' et de t . Si donc nous faisons abstraction des termes en k , les équations du mouvement seront de la forme

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u'}{dt^2} = F \frac{d^2 u'}{dz'^2} + G \frac{d^2 v'}{dz'^2} + H \frac{d^2 w'}{dz'^2}, \\ \frac{d^2 v'}{dt^2} = F' \frac{d^2 v'}{dz'^2} + G' \frac{d^2 u'}{dz'^2} + H' \frac{d^2 w'}{dz'^2}, \\ \frac{d^2 w'}{dt^2} = F'' \frac{d^2 w'}{dz'^2} + G'' \frac{d^2 u'}{dz'^2} + H'' \frac{d^2 v'}{dz'^2}. \end{cases}$$

Portons-y les valeurs de u' , v' , w' , données par

$$(16 \text{ bis}) \quad \frac{u'}{M} = \frac{v'}{N} = \frac{w'}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z'}{\omega} \right) \sqrt{-1}};$$

elles deviendront

$$(17) \quad \begin{cases} (F - \omega^2)M + GN + HP = 0, \\ (F' - \omega^2)N + G'M + H'P = 0, \\ (F'' - \omega^2)P + G''M + H''N = 0. \end{cases}$$

Nous savons que ces relations doivent être vérifiées, si on y fait deux quelconques des quantités M , N , P très-petites de l'ordre de a , b , c , la troisième restant finie. Il en résulte que les coefficients G , H , G' , H' , G'' , H'' sont au plus de l'ordre de a , b , c , et que les carrés des trois vitesses de propagation sont respectivement égaux, sauf erreur du second ordre, à F , F' , F'' . Si nous considérons spécialement les deux vibrations quasi-transversales, en observant que les deux valeurs correspondantes de ω^2 diffèrent très-peu, nous verrons que G , G' sont seulement du second ordre en a , b , c . Dans l'étude de ces vibrations, on pourra donc réduire les deux premières équations du mouvement, sauf les termes en k , à

$$(18) \quad \frac{d^2 u'}{dt^2} = F \frac{d^2 u'}{dz'^2}, \quad \frac{d^2 v'}{dt^2} = F' \frac{d^2 v'}{dz'^2}.$$

Je suppose qu'on ait pris l'axe des x' dans le sens de la vibration qui correspond à la plus grande vitesse de propagation, ou dans le sens de l'autre vibration, suivant que a est $>$ ou $<$ c . En appelant U , U' les angles que fait la normale à l'onde avec les axes optiques, nous aurons, sauf erreur du second ordre [voir, dans le *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, la formule (30), où r^2 ne diffère de ω^2 que d'une quantité négligeable du second ordre],

$$(19) \quad \begin{cases} F = L \left[1 + \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} \cos(U + U') \right], \\ F' = L \left[1 + \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} \cos(U - U') \right]. \end{cases}$$

Quant aux termes en k , ils sont les mêmes dans tout système d'axes rectangulaires de même sens relatif; avec le nouveau système de coordonnées ils ne donneront rien dans la troisième équation (16) du mouvement, tandis qu'ils augmenteront respectivement les seconds membres des deux premières de $\frac{4\pi^2}{\tau^2} k \frac{dv'}{dz'}$ et de $-\frac{4\pi^2}{\tau^2} k \frac{du'}{dz'}$. Les vraies équations ainsi obtenues, on y portera les valeurs (16 bis). La troisième donnera toujours

$$(F'' - \omega^2)P + G''M + H''N = 0.$$

Comme G'' et H'' sont très-petits, il en résulte qu'on aura, ou bien $F'' - \omega^2$ très-petit, ou bien P très-petit.

Dans le premier cas, les deux premières équations du mouvement donneront M et N très-petits : donc l'onde correspondante est quasi-longitudinale; de plus la troisième équation donne $\omega^2 = F''$, comme si k était nul.

Dans le deuxième cas, la vibration est quasi-transversale. On peut négliger les termes en G , G' , H , H' , qui sont du second ordre, et les équations (18), avec les termes en k , deviennent

$$(20) \quad \begin{cases} \left(\frac{F}{\omega^2} - 1 \right) M + \frac{2\pi k}{\tau\omega} N \sqrt{-1} = 0, \\ \left(\frac{F'}{\omega^2} - 1 \right) N - \frac{2\pi k}{\tau\omega} M \sqrt{-1} = 0. \end{cases}$$

Éliminons le rapport $\frac{N}{M}$; nous obtiendrons l'équation des vitesses,

$$\left(\frac{F}{\omega^2} - 1\right)\left(\frac{F'}{\omega'^2} - 1\right) = \left(\frac{2\pi k}{\tau\omega}\right)^2,$$

qui, résolue en négligeant les quantités très-petites par rapport à k , donne

$$\omega^2 = \frac{F + F'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{F - F'}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi k \sqrt{L}}{\tau}\right)^2}.$$

Appelons ω_1 la racine qu'on obtient en prenant le radical avec le signe de $F - F'$, et ω_2 l'autre racine. Les valeurs (19) de F, F' permettent d'obtenir ces deux racines en U et U' . Leur différence est

$$(21) \quad \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\sqrt{L}} = \sqrt{\left[\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2} \sin U \sin U'\right]^2 + \left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^2}.$$

Les équations (20) donneront ensuite le rapport $\frac{N}{M}$

$$\frac{N}{M} = -\frac{2\pi k}{\tau\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2 - F'} \sqrt{-1} = \frac{2\pi k \sqrt{L}}{\tau} \cdot \frac{-\sqrt{-1}}{\frac{F - F'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{F - F'}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi k \sqrt{L}}{\tau}\right)^2}},$$

ou bien

$$\frac{N}{M} = \frac{2\pi k}{\tau} \cdot \frac{-\sqrt{-1}}{\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2} \sin U \sin U' \pm \sqrt{\left[\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2} \sin U \sin U'\right]^2 + \left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^2}}.$$

Appelons q le coefficient de $-\sqrt{-1}$ dans cette expression de $\frac{N}{M}$, lorsqu'on prend le radical avec le signe de $F - F'$, c'est-à-dire de $a - c$. Cela donne

$$N = -Mq\sqrt{-1}, \quad \text{si l'on prend la première racine } \omega_1,$$

$$M = -Nq\sqrt{-1}, \quad \text{si l'on prend la seconde racine } \omega_2.$$

Enfin posons $M = Ie^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ dans le premier cas, et $N = Ie^{\varphi_2\sqrt{-1}}$ dans le

second, I , φ_1 , φ_2 désignant des quantités réelles; puis, gardons pour intégrales simples les parties réelles de u' , v' . Nous aurons les équations des deux ondes

$$u' = I \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z'}{\omega_1} + \varphi_1 \right), \quad v' = Iq \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z'}{\omega_1} + \varphi_1 \right)$$

et

$$u' = Iq \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z'}{\omega_2} + \varphi_2 \right), \quad v' = I \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z'}{\omega_2} + \varphi_2 \right).$$

La trajectoire des molécules dans la première onde est une ellipse dont le grand axe est parallèle aux x' , le petit axe aux y' , et qui est décrite, si q est positif, en tournant dans le sens du premier de ces axes vers le second. Dans la deuxième onde, la trajectoire est encore une ellipse, semblable à la première, mais disposée à angle droit avec elle et décrite en sens inverse.

Le rapport du petit axe au grand, dans ces deux ellipses, est en valeur absolue

$$(22) \quad q = \frac{2\pi k}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2} \sin U \sin U' + \sqrt{\left[\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2} \sin U \sin U' \right]^2 + \left(\frac{2\pi k}{\tau} \right)^2}}.$$

Le radical doit être pris avec le signe de $a - c$.

L'angle qui exprime le retard contracté par la deuxième onde, par rapport à la première, en traversant une épaisseur h de la substance, est

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{h}{\omega_2} - \frac{h}{\omega_1} \right) = \frac{2\pi(\omega_1 - \omega_2)h}{\tau L}.$$

On aura donc, d'après la relation (21),

$$(23) \quad \text{retard} = 2\pi h \sqrt{\left(\frac{a-c}{2\tau\sqrt{L}} \sin U \sin U' \right)^2 + \left(\frac{2\pi k}{\tau^2 L} \right)^2}.$$

Le radical doit être pris avec le signe de $a - c$.

En résumé, un cristal dissymétrique peut propager dans chaque direction, outre une onde quasi-longitudinale de même vitesse que s'il était symétrique, deux ondes quasi-transversales, ayant chacune

sa vitesse distincte de propagation. Les vibrations de chaque molécule d'éther, dans ces deux ondes, se font suivant deux ellipses semblables, de forme parfaitement déterminée par la relation (22), disposées à angle droit et décrites en sens contraire l'une de l'autre. De plus, le grand axe de chaque ellipse est dirigé comme le serait la vibration rectiligne correspondante, dans le milieu supposé symétrique.

Le rapport q du petit axe au grand axe [(22)] est le plus grand possible pour $U = 0$, ou bien pour $U' = 0$. Il est alors égal à 1 : l'ellipse est un cercle, et l'on a la double réfraction circulaire, avec les mêmes lois approchées que dans les milieux isotropes dissymétriques. Dès que U ou U' augmentent, le rapport q diminue, et il devient minimum pour U et U' égaux à 90 degrés. Si k est assez petit par rapport à $a - c$, les ellipses deviendront presque des lignes droites, et les vitesses ω_1, ω_2 seront à peu près les mêmes que pour un cristal symétrique.

Observons, en terminant ce paragraphe, que le défaut de symétrie d'un cristal est caractérisé dans les expressions de u_1, v_1, w_1 , non-seulement par les termes en B , mais encore par d'autres que nous avons négligés, et qui contiendraient des dérivées d'ordre supérieur au premier. D'après la nature presque isotrope et presque symétrique du cristal, tous ces termes, y compris ceux en B , se trouvent, sauf erreur négligeable, les mêmes que dans un milieu isotrope, c'est-à-dire qu'ils ont la même forme pour tous les systèmes d'axes coordonnés de même sens relatif. Leur ensemble constitue, dans u_1, v_1, w_1 , des expressions dont aucun terme n'est compatible avec la symétrie, quel que soit le système d'axes adopté. Si l'on choisit en particulier les axes des x' , des y' et des z' , dont les deux premiers sont parallèles aux ondes, ces termes seront pareils aux termes en $R, R', R'', \dots$ des formules (10), qui seuls, dans ces expressions isotropes de u_1, v_1, w_1 , les plus générales possibles pour des ondes parallèles au plan des x, y , sont incompatibles avec la symétrie. Par suite, d'après les formules (10 bis), ils ne donneront rien dans la troisième équation du mouvement, mais ils ajouteront, au second membre de la première équation, un terme de la forme $\frac{4\pi^2}{\tau^2} k \frac{dv'}{dz'}$, et, au second membre de

la deuxième, un terme de la forme $-\frac{4\pi^2}{\tau^2} k \frac{du'}{dx}$, k étant une série ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2 \omega^2$. On obtiendra donc tous les résultats de ce paragraphe, à cela près que, dans les diverses relations de (20) à (23), il faudra remplacer k par cette série. On pourra, dans celle-ci, substituer à ω^2 sa valeur approchée L , et k ne sera plus qu'une fonction de τ^2 , la même pour toutes les ondes quasi-transversales propagées dans le milieu.

§ VII. — Application au quartz.

Nous avons supposé au coefficient k une valeur comparable à $a - c$. Or cela n'a lieu pour aucun des corps biréfringents connus jusqu'à ce jour. Dans le quartz, qui est presque le seul de ces corps où l'on ait trouvé la double-réfraction elliptique, k est compris entre les quantités du second ordre en $a - c$ et celles du troisième. L'influence de ce coefficient ne se fait donc sentir que sur les ondes presque normales à l'axe optique : elle est d'ailleurs soumise aux lois du paragraphe précédent, malgré l'extrême petitesse de k , car les termes que nous avons négligés seraient encore beaucoup plus petits que les termes conservés.

Dans les expériences faites par M. Jamin sur la double réfraction elliptique du quartz, on avait, en désignant par ω_0 la vitesse de la lumière dans le vide, et prenant pour unité le millimètre,

$$\tau\omega_0 = 0,000588, \quad \frac{2\pi k}{\tau^2 L} = 0,117, \quad \sqrt{L} = \frac{\omega_0}{1,55}, \quad \frac{a-c}{2\sqrt{L}} = \frac{0,0091}{\omega_0}.$$

De là on tire, d'après (23),

$$\frac{\text{retard}}{2\pi h} = \sqrt{(15,47 \sin^2 U)^2 + 0,01369},$$

et, en amenant le second membre de (22) à ne dépendre que de $\frac{2\pi h}{\tau^2 L}$ et

de $\frac{a-c}{2\tau\sqrt{L}} \sin U \sin U'$,

$$q = \frac{0,117}{15,47 \sin^2 U + \sqrt{(15,47 \sin^2 U)^2 + 0,01369}}.$$

Les tableaux suivants montrent que ces formules s'accordent autant qu'on pouvait s'y attendre avec les résultats de l'expérience.

U	RETARD $\frac{2\pi h}{\lambda}$		DIFFÉRENCE.	U	q		DIFFÉRENCE.
	Calculé.	Observé.			Calculé.	Observé.	
3.30'	0,130	0,134	0,004	5.57'	0,317	0,332	0,015
5.57	0,203	0,204	0,001	8.16	0,177	0,173	— 0,004
8.08	0,331	0,338	0,007	9.55	0,125	0,128	0,003
9.50	0,466	0,471	0,005	11.21	0,096	0,100	0,004
11.55	0,670	0,667	— 0,003	12.35	0,079	0,077	— 0,002
13.41	0,874	0,862	— 0,012	13.41	0,067	0,068	0,001
15.03	1,050	1,055	0,005	15.32	0,052	0,047	— 0,005
16.31	1,251	1,308	0,057				

§ VIII. — *Conditions à la surface, dites de continuité : réflexion et réfraction.*

Nous nous sommes occupés jusqu'ici des phénomènes lumineux qui sont produits à l'intérieur des corps transparents. Il reste à expliquer ceux qui se passent à la surface de séparation de deux d'entre eux, c'est-à-dire la réflexion et la réfraction. Cauchy a fait voir que, pour obtenir leurs lois, il faut joindre aux équations indéfinies des petits mouvements de l'éther des conditions relatives à la surface, qu'il appelle *conditions de continuité*. Elles consistent à admettre que les déplacements u, v, w des molécules d'éther, et les dérivées premières par rapport à x, y, z de ces déplacements, sont égaux chacun à chacun en tout point de la surface, de part et d'autre de celle-ci.

Ces conditions s'obtiennent naturellement dans notre manière de concevoir l'éther. En effet, cet agent, ayant dans deux corps adjacents la même élasticité et la même densité, forme un milieu unique où les u, v, w ne peuvent varier brusquement d'un point aux points voisins. Donc les déplacements doivent être les mêmes de part et d'autre de la surface de séparation. Supposons, pour fixer les idées, que celle-ci soit le plan des yz . Les valeurs de u, v, w seront égales de part et

d'autre de ce plan, et il en sera, par suite, de même des dérivées partielles de u , v , w par rapport à y et à z . Si actuellement on découpe par la pensée, en un point quelconque de la surface, un cylindre très-plat de matière, ayant ses bases parallèles au plan des yz et situées respectivement dans l'un et dans l'autre corps, les actions exercées sur ces deux bases devront très-sensiblement se faire équilibre. Cela entraîne l'égalité, de part et d'autre du plan des yz , des trois composantes élastiques de l'éther que M. Lamé appelle, sous l'unité de surface, N_1 , T_3 , T_2 , et qui valent respectivement (*Leçons sur l'élasticité*, § 20)

$$(\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx} + \lambda \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \quad \mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \quad \mu \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right).$$

Les dérivées partielles $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ sont déjà égales de part et d'autre de la surface de séparation; donc l'égalité de ces forces montre qu'il en est de même de $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$.

Si l'éther n'avait pas la même élasticité chez deux corps adjacents, il est clair que, λ et μ n'étant pas égaux des deux côtés du plan des yz , $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ ne le seraient pas non plus. Donc les conditions de continuité n'auraient pas lieu, et les lois des intensités des ondes réfléchies et réfractées ne seraient pas celles que donne l'expérience. C'est pourquoi nous avons cru devoir admettre la constance d'élasticité de l'éther dans deux milieux adjacents. Quant à la constance de sa densité, elle n'est pas nécessaire à notre théorie; mais elle nous paraît une condition naturelle de la constance d'élasticité, et nous la regardons comme vraisemblable.