

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PH. GILBERT

Sur les fonctions de Sturm

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 12 (1867), p. 87-97.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12_87_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. PH. GILBERT,

Professeur à l'Université de Louvain.

§ I.

Soit

$$(1) \quad V(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

une équation de degré n , dont les racines $a, b, c, \dots, l$ sont supposées inégales, et posons généralement

$$R_i = V(x) \sum \frac{a^i}{x-a},$$

le signe $\sum$ s'appliquant à toutes les racines de l'équation. Les fonctions R_i , étant toutes de degré $n-1$, seront de la forme

$$R_i = \alpha_i x^{n-1} + \beta_i x^{n-2} + \dots + \eta_i x^{n-r+1} + \theta_i x^{n-r} + \dots + \lambda_i,$$

et l'identité

$$\sum \frac{a^i}{x-a} = x \sum \frac{a^{i-1}}{x-a} - \sum a^{i-1}$$

entraînant la relation suivante :

$$R_i = x R_{i-1} - V(x) \sum a^{i-1},$$

il faut que le terme en x^n se réduise à zéro, d'où

$$\alpha_{i-1} = \sum a^{i-1},$$

c'est-à-dire que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots$ sont les sommes des puissances semblables de degré $0, 1, \dots, i, \dots$ des racines de l'équation (1).

Les fonctions $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$ se déduiront donc, par les relations

$$R_1 = x R_0 - \alpha_0 V, \quad R_2 = x R_1 - \alpha_1 V, \dots, \quad R_{n-1} = x R_{n-2} - \alpha_{n-2} V,$$

de la première R_0 , qui est connue, car on a

$$R_0 = \sum \frac{V}{x-a} = V_1 = \text{la dérivée de la fonction } V,$$

et le calcul se fera très-rapidement pour une équation numérique donnée, en usant de simplifications faciles à apercevoir.

§ II.

Cela posé, soient $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$ les fonctions de Sturm; on a les relations

$$V_2 = V_1 Q_1 - V, \quad V_3 = V_2 Q_2 - V_1, \dots, \quad V_r = V_{r-1} Q_{r-1} - V_{r-2}, \dots,$$

où $Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-1}$ sont les quotients du premier degré en x , et où V_r est de degré $n - r$. Concevons qu'on élimine de la seconde équation V_2 au moyen de la première, de la troisième V_3 et V_2 au moyen des deux précédentes, et ainsi de suite : on arrivera à exprimer chacune des fonctions V_r au moyen de V et V_1 seulement, sous la forme

$$(2) \quad V_r = S_r V_1 - T_r V,$$

et l'on voit sans peine que la fonction S_r renfermera le terme $Q_1 Q_2 \dots Q_{r-1}$, qui sera de degré plus élevé par rapport à x que tous les autres termes : donc S_r sera de degré $r - 1$, donc nous pouvons poser

$$S_r = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_{r-1} x^{r-1}.$$

D'autre part, si l'on décompose la fraction $\frac{V_r(x)}{V(x)}$ en fractions simples par la formule ordinaire, on obtient

$$\frac{V_r(x)}{V(x)} = \sum \frac{1}{x-a} \frac{V_r(a)}{V_1(a)},$$

et comme $V(a) = 0$, l'équation (2) donne

$$\frac{V_r(x)}{V(x)} = \sum \frac{S_r(a)}{x-a} = \sum \frac{q_0 + q_1 a + q_2 a^2 + \dots + q_{r-1} a^{r-1}}{x-a},$$

d'où

$$V_r(x) = q_0 R_0 + q_1 R_1 + \dots + q_{r-1} R_{r-1}.$$

Mais $R_0, R_1, \dots, R_{r-1}$ sont de degré $n - 1$, tandis que V_r n'est que de degré $n - r$; il faut donc, en désignant par A_r le coefficient de la plus haute puissance de x dans la fonction V_r , que l'on ait les équations suivantes :

[illegible]

Tirons de ces équations les valeurs des coefficients q_i , et posons

$$N_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \dots & \eta_0 & \theta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \dots & \eta_1 & \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \dots & \eta_{r-1} & \theta_{r-1} \end{vmatrix},$$

nous aurons immédiatement

$$q_i = \frac{A_r}{N_r} \frac{dN_r}{d\theta_i},$$

d'où

$$V_r = \frac{A_r}{N_r} \left(R_0 \frac{dN_r}{d\theta_0} + R_1 \frac{dN_r}{d\theta_1} + \dots + R_{r-1} \frac{dN_r}{d\theta_{r-1}} \right) \\ = \frac{A_r}{N_r} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \dots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \dots & \eta_1 & R_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \dots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Observons ici 1° que $\frac{dN_r}{d\theta_{r-1}}$ n'est autre chose que N_{r-1} , et 2° que q_{r-1} ,

coefficient de la plus haute puissance de x dans S_{r-1} , ne peut être que le produit des coefficients de x dans $Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-1}$, d'où l'on a

$$q_{r-1} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdots \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}} = \frac{1}{A_{r-1}},$$

par où l'équation

$$q_{r-1} = \frac{A_r}{N_r} \frac{dN_r}{d\theta_{r-1}} \text{ se réduit à celle-ci: } \frac{A_r}{N_r} = \frac{1}{A_{r-1} N_{r-1}}.$$

Il suit de là que $\frac{A_r}{N_r}, \frac{A_{r-1}}{N_{r-1}}, \dots, \frac{A_1}{N_1} = \frac{n}{n} = 1$ sont de même signe, c'est-à-dire positifs; on peut donc, dans la recherche du nombre de racines réelles de l'équation (1), faire abstraction de ces coefficients $\frac{A_r}{N_r}$ par lesquels les fonctions V_r sont multipliées, et qui ne changent pas leurs signes; on peut donc substituer aux fonctions de Sturm les fonctions

$$(3) \quad X_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \dots & \gamma_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \dots & \gamma_1 & R_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \dots & \gamma_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Mais il est clair que dans le développement de cette expression, les coefficients de $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^{n-r+1}$ se réduisent à zéro, comme déterminants qui ont deux colonnes égales; on peut donc supprimer ces termes dans les fonctions R_i , et la série des fonctions X_r , propres à déterminer le nombre des racines réelles de l'équation $V=0$, prendra la forme

$$V(x), \quad X_1 = R_0 = \alpha_0 x^{n-1} + \beta_0 x^{n-2} + \dots + \lambda_0,$$

$$X_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 x^{n-2} + \dots + \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 x^{n-2} + \dots + \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 x^{n-3} + \dots + \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 x^{n-3} + \dots + \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 x^{n-3} + \dots + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$X_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \dots & \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \dots & \lambda_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}.$$

On voit que ces fonctions se composent fort simplement au moyen des seuls coefficients des fonctions R_i , et que, celles-ci une fois formées, on peut écrire immédiatement le coefficient d'une puissance quelconque des fonctions X_r , sans passer par aucun intermédiaire.

Nous venons de dire que l'on peut faire abstraction des coefficients positifs $\frac{A_r}{N_r}$ qui multiplient les fonctions sturmiennes; mais on peut aussi les calculer au moyen des coefficients $\alpha_i, \beta_i, \dots$, car la relation

$$\frac{A_r}{N_r} = \frac{1}{A_{r-1} N_{r-1}} = \frac{1}{A_{r-1}^2} \frac{A_{r-1}}{N_{r-1}}$$

donne celle-ci :

$$A_r = \frac{N_r}{A_{r-1}^2} \cdot \frac{1}{A_{r-2}^2} \cdots \frac{1}{A_1^2} = \frac{N_r}{(A_1 A_2 \dots A_{r-1})^2},$$

et comme $A_1 = n$ est connu, on aura successivement $A_2, A_3, \dots$

§ III.

Montrons brièvement comment, en faisant usage des propriétés élémentaires des déterminants, on tire des formules ci-dessus les expressions des fonctions de Sturm données par plusieurs analystes. Pour cela, nous observerons que la relation

$$R_i = x R_{i-1} - \alpha_{i-1} V$$

entraîne les suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \xi_{i-1} - p_1 \alpha_{i-1}, \\ \beta_i &= \gamma_{i-1} - p_2 \alpha_{i-1}, \\ \gamma_i &= \delta_{i-1} - p_3 \alpha_{i-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_i &= \theta_{i-1} - p_{r-1} \alpha_{i-1}, \end{aligned}$$

d'où il suit que si dans le déterminant

$$X_r = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \dots & \eta_0 & R_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \dots & \eta_1 & R_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \dots & \eta_{r-1} & R_{r-1} \end{vmatrix}$$

on ajoute aux termes de la seconde colonne ceux de la première multipliés par $-p_1$, aux termes de la troisième ceux de la première multipliés par $-p_2$, et ceux de la seconde transformée multipliés par $-p_1$, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière colonne, on arrivera facilement à l'expression

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_{r-2} & R_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots & \alpha_{r-1} & R_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r-1} & \alpha_r & \alpha_{r+1} \dots & \alpha_{2r-3} & R_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Mais d'autre part, si l'on pose

$$s_i = \sum a^i = \alpha_i, \quad u_i = \sum \frac{a^i}{x-a} = \frac{R_i}{V},$$

la formule précédente se réduit à

$$(4) \quad X_r = V \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots & s_{r-2} & u_0 \\ s_1 & s_2 \dots & s_{r-1} & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{r-1} & s_r \dots & s_{2r-3} & u_{r-1} \end{vmatrix},$$

ce qui est précisément la formule donnée par M. Cayley [*]. Réciproquement, on pourrait en déduire celle que nous avons établie d'abord.

Lorsque l'on veut exprimer les fonctions X_r au moyen des coefficients p_i de l'équation proposée, on doit observer que l'on a

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= n, & \beta_0 &= (n-1)p_1, & \gamma_0 &= (n-2)p_2, \dots, \\ \alpha_1 &= -p_1, & \beta_1 &= -2p_2, & \gamma_1 &= -3p_3, \dots, \end{aligned}$$

et on élimine tous les autres coefficients à l'aide de la loi de déduction.

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI, p. 297.

Prenons par exemple X_3 :

$$\begin{aligned}
 X_3 &= \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ R_0 & R_1 & R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 p_1 & \beta_1 - \alpha_1 p_1 \\ \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 p_2 & \gamma_1 - \alpha_1 p_2 \\ R_0 & x R_0 - \alpha_0 V & x R_1 - \alpha_1 V \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \beta_1 \\ p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ V & R_0 & x R_0 & x R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 - \alpha_0 p_1 \\ p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 p_2 \\ p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 - \alpha_0 p_3 \\ V & R_0 & x R_0 & x^2 R_0 - \alpha_0 x V \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \\ p_1 & 1 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ p_2 & p_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ p_3 & p_2 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ x V & V & R_0 & x R_0 & x^2 R_0 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

d'où

$$X_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & n \\ p_1 & 1 & 0 & n & (n-1)p_1 \\ p_2 & p_1 & n & (n-1)p_1 & (n-2)p_2 \\ p_3 & p_2 & (n-1)p_1 & (n-2)p_2 & (n-3)p_3 \\ x V & V & V_1 & x V_1 & x^2 V_1 \end{vmatrix}.$$

La loi de formation des fonctions X_r se montre déjà suffisamment. On pourrait également exprimer les déterminants N_r directement au moyen des coefficients de l'équation proposée, par une marche semblable : ces formules sont tout à fait analogues à celles données par M. Cayley [*] et par M. Brioschi [**] pour remplir le même objet ; elles ne sont d'ailleurs d'aucune utilité pour la formation des fonctions X_r sur une équation numérique donnée. On y voit aussi comment on pourrait former les fonctions S_r et T_r .

Reprenons maintenant l'expression (4) de X_r , en l'écrivant sous la

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 269.

[**] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII, p. 71 ; 1854.

forme

$$\frac{X_r}{V} = \begin{vmatrix} u_0 & -s_0 & -s_1 \dots & -s_{r-2} \\ u_1 & -s_1 & -s_2 \dots & -s_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r-1} & -s_{r-1} & -s_r \dots & -s_{2r-3} \end{vmatrix},$$

et en nous rappelant que l'on a la relation

$$u_i = xu_{i-1} - s_{i-1}.$$

Ajoutons aux termes de la seconde colonne ceux de la première multipliés par x , aux termes de la troisième ceux de la seconde transformée multipliés par x , et ainsi de suite, il viendra

$$\frac{X_r}{V} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \dots & u_{r-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 \dots & u_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r-1} & u_r & u_{r+1} \dots & u_{2r-2} \end{vmatrix}.$$

C'est sous cette forme que M. Hermite a obtenu, par une voie tout à fait nouvelle [*], les fonctions de Sturm. De là on déduit sans peine la transformation célèbre due à M. Sylvester. En effet, on a posé

$$u_i = \sum \frac{a^i}{x-a},$$

et en ayant égard à une propriété connue des déterminants, on donne à l'équation ci-dessus la forme

$$\frac{X_r}{V} = S \begin{vmatrix} \frac{1}{x-a} & \frac{b}{x-b} \dots & \frac{g^{r-1}}{x-g} \\ \frac{a}{x-a} & \frac{b^2}{x-b} \dots & \frac{g^r}{x-g} \\ \frac{a^2}{x-a} & \frac{b^3}{x-b} \dots & \frac{g^{r+1}}{x-g} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{a^{r-1}}{x-a} & \frac{b^r}{x-b} \dots & \frac{g^{2r-2}}{x-g} \end{vmatrix},$$

[*] *Programme détaillé d'un cours d'Arithmétique*, par Roguet, note VI.

S désignant une somme de déterminants semblables obtenus en remplaçant successivement $a, b, g, \dots$ par toutes les racines de l'équation (1), et négligeant, comme nuls, ceux où une même racine figure dans deux colonnes. On tire de là

$$\frac{X_r}{V} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ a & b \dots g \\ a^2 & b^2 \dots g^2 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a^{r-1} & b^{r-1} \dots g^{r-1} \end{vmatrix} \times \frac{a^0 b^1 c^2 \dots g^{r-1}}{(x-a)(x-b) \dots (x-g)},$$

mais dans cette somme désignée par **S** on peut grouper ensemble tous les termes où entrent les mêmes racines $a, b, \dots, g$, ces termes ayant le même dénominateur $(x-a)(x-b) \dots (x-g)$, et le même déterminant facteur, au signe près; on voit alors sans peine que la somme des termes

$$\pm a^0 b^1 c^2 \dots g^{r-1}$$

se réduira à ce même déterminant, d'où résulte l'équation

$$\frac{X_r}{V} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ a & b \dots g \\ a^2 & b^2 \dots g^2 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a^{r-1} & b^{r-1} \dots g^{r-1} \end{vmatrix}^2 \times \frac{1}{(x-a)(x-b) \dots (x-g)},$$

qui n'est autre qu'une équation de M. Cayley [*]. Le signe **S** se rapporte maintenant à toutes les combinaisons différentes des n racines, prises r à r .

Enfin rappelons-nous que le déterminant dont le carré figure dans cette formule est égal, en vertu d'un théorème connu, à

$$\pm (a-b)(a-c) \dots (a-g)(b-c) \dots (b-g) \dots (f-g),$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI.

c'est-à-dire au produit des différences des racines $a, b, \dots, g$, prises deux à deux ; et en faisant cette substitution, il vient

$$X_r = V \prod \frac{(a-b)^2 (a-c)^2 \dots (f-g)^2}{(x-a)(x-b) \dots (x-g)}.$$

On reconnaît là les formules de M. Sylvester [*]. Ainsi nos fonctions X_r ne sont autre chose que les fonctions de ce géomètre.

§ IV.

Il résulte évidemment de la formule de M. Sylvester, comme Sturm l'a fait voir, que la dernière fonction X_n se réduit au produit des carrés des différences des n racines $a, b, \dots, l$ de l'équation (1), ou au dernier terme H de l'équation aux carrés des différences. On a donc, d'après nos formules,

$$(5) \quad H = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \dots & \lambda_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \dots & \lambda_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

expression remarquable de ce dernier terme au moyen des coefficients des fonctions $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}$.

Appliquons ce procédé de formation à l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

On trouve immédiatement

$$R_0 = 3x^2 + 2px + q, \quad R_1 = -px^2 - 2qx - 3r,$$

$$R_2 = (p^2 - 2q)x^2 + (pq - 3r)x + pr,$$

d'où

$$H = \begin{vmatrix} 3 & -p & p^2 - 2q \\ 2p & -2q & pq - 3r \\ q & -3r & pr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & p & 2q \\ 2p & 2q & pq + 3r \\ q & 3r & 2pr \end{vmatrix},$$

[*] *Philosophical Transactions*, 1853, III. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 368.

d'où

$$H = 18pqr - 27r^2 + p^2q^2 - 4p^3r - 4q^3.$$

De même, pour l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

on aura

$$R_0 = 4x^3 + 3px^2 + 2qx + r,$$

$$R_1 = -px^3 - 2qx^2 - 3rx - 4s,$$

$$R_2 = (p^2 - 2q)x^3 + (pq - 3r)x^2 + (pr - 4s)x + ps,$$

$$R_3 = [(pq - 3r) - p(p^2 - 2q)]x^3 + [(pr - 4s) - q(p^2 - 2q)]x^2, \\ + [ps - r(p^2 - 2q)]x - s(p^2 - 2q),$$

d'où l'on tire, en appliquant la forme (5) et en faisant quelques simplifications évidentes,

$$H = - \begin{vmatrix} 4 & p & 2q & 3r \\ 3p & 2q & pq + 3r & 2pr + 4s \\ 2q & 3r & 2pr + 4s & 3ps + qr \\ r & 4s & 3ps & 2qs \end{vmatrix},$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à développer ce déterminant.

Si l'on compare cette méthode pour calculer le dernier terme de l'équation aux différences avec les procédés antérieurement donnés (SERRET, *Algèbre supérieure*, 2^e édition, p. 30 et 452), on trouvera sans doute qu'elle est plus facile à retenir, plus rapide, qu'elle s'applique immédiatement à une équation numérique donnée, et qu'enfin elle a l'avantage de conduire directement à l'expression du terme H pour une équation de degré n , sans qu'il soit nécessaire de passer par toutes les équations de degré inférieur à n .