

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

**Mémoire sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de
grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la
proportion de leur force vive qui est perdue pour la translation
ultérieure; Et généralement sur le mouvement longitudinal d'un
système de deux ou plusieurs prismes élastiques**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 12 (1867), p. 237-376.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12_237_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12_237_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

MÉMOIRE

Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour la translation ultérieure; Et généralement sur le mouvement longitudinal d'un système de deux ou plusieurs prismes élastiques;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Lu à l'Académie des Sciences le 24 décembre 1866.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSÉ. — CHOC DE DEUX BARRES DE MÊME MATIÈRE ET DE MÊME SECTION.

1. *Exposé et principaux résultats.* — Coriolis, en étudiant soigneusement le phénomène du choc, avait fait, dès longtemps avant sa publication de 1829 [*], cette simple et judicieuse remarque, qu'à la fin de celui de deux corps parfaitement élastiques, la somme des forces vives, évaluées en attribuant à ces corps les vitesses de leurs centres de gravité respectifs, ne pouvait être égale à la somme des forces vives possédées avant le choc, que si ces mêmes corps restaient après leur séparation *sans mouvement vibratoire* comme sans compression; que, par conséquent, quelque entière que fût leur élasticité, et contrairement à ce qui est ordinairement enseigné, il y avait généralement des *pertes*, même considérables, de force vive utile ou translatoire; idée que Binet avait eue de son côté en considérant seulement le son que toute collision fait entendre.

[*] *Du calcul de l'effet des machines*, n° 66, ou *Rapport* de Navier sur cet ouvrage, p. 4.

Cauchy ayant été prié par Coriolis de calculer la force vive ainsi perdue pour le mouvement de translation ultérieur des corps qui se sont heurtés, répondit à cet appel par une Note de deux pages déposée à l'Académie le 19 février 1827, et aussitôt imprimée [*]. Il y considère le choc longitudinal de deux tiges ou barres cylindriques ou prismatiques de même matière et de même grosseur, supposée petite, qui se heurtent avec des vitesses opposées et réciproques aux longueurs (cas auquel les autres peuvent se ramener); et, sans indiquer ses procédés de recherche, il donne le détail de ce qui doit se passer depuis l'instant de la rencontre des deux barres jusqu'à celui où l'ébranlement, ayant parcouru aller et retour la plus courte des deux, arrive à lui donner partout une vitesse égale à celle que possédait primitivement la plus longue; et comme celle-ci, au point de contact, a une vitesse alors plus grande et tendant à la séparation, il conclut que le choc est alors terminé. Ses autres conclusions, relatives à la perte de force vive, sont : 1° qu'elle n'est zéro que lorsque les deux barres ont la même longueur; 2° que cette perte s'élève *aux trois quarts* de la somme des forces vives primitives quand l'une des deux barres est double de l'autre; 3° qu'elle serait de moitié seulement (continue-t-il) si l'une des deux barres était infiniment plus longue que l'autre.

Coriolis cite les deux premières de ces conclusions finales de Cauchy, mais non la dernière, que sans doute il soupçonnait d'erreur ou, pour mieux dire, de malentendu quant à la manière de concevoir la force vive résidue (n° 7 ci-après).

Poisson traita peu de temps après, mais non en vue d'évaluation de force vive, le même problème du choc longitudinal de deux barres élastiques, aussi de mêmes grosseur et matière, en donnant une exposition complète de son procédé de solution, qui le conduit à des expressions en séries trigonométriques susceptibles de sommation [**].

Il trouve, comme Cauchy, que lorsque les deux barres d'égale section sont aussi égales en longueur, elles se *séparent* en échangeant

[*] *Bulletin des Sciences de la Société Philomathique* pour décembre 1826, p. 180; et plus tard aux *Mémoires de l'Institut*.

[**] *Traité de Mécanique*, 2^e édition, 1833; nos 499 à 504.

intégralement leurs vitesses, et le choc *se termine* sans qu'elles conservent ensuite ni un mouvement vibratoire quelconque, ni une *compression* qui en engendrerait un ultérieurement. Mais, pour tout autre cas, il y a désaccord avec Cauchy quant au fait présumé de la *séparation*. Poisson, en effet, donnant une double condition à celle-ci, à savoir que non-seulement la vitesse de la barre qui va devant arrive à surpasser celle de l'autre à leur point de contact, mais encore *que la compression soit nulle dans l'une et dans l'autre* au même point et au même instant, croit pouvoir conclure que, pour peu que les longueurs de ces deux barres soient inégales, elles ne se sépareront point à l'instant indiqué par Cauchy ni à aucun de ceux qui suivent jusqu'à celui où le temps écoulé est devenu double de ce qu'il faut à l'ébranlement pour parcourir la somme des longueurs des deux barres. Et comme, à ce dernier instant, les formules donnent des vitesses partout égales à ce qu'elles étaient initialement, Poisson en infère que leur choc *recommencera* en quelque sorte pour se reproduire périodiquement, en sorte qu'elles marcheront et vibreront ensemble indéfiniment comme une seule barre.

Comme l'égalité absolue de deux longueurs est physiquement impossible ou n'a qu'une probabilité zéro, il s'ensuivrait que deux barres parfaitement élastiques se comporteraient constamment de la même manière, quant à leurs vitesses de translation, que deux corps sans élasticité. La perte serait de toute la force vive possédée quand les vitesses d'arrivée étaient contraires et en raison inverse des masses; c'est-à-dire qu'alors il y aurait, après le choc, immobilité, sauf les vibrations dont le système resterait animé, et aucun *rebond*.

Il ne faut pas (comme on pourrait être tenté de le faire) chercher la raison de ce désaccord réel ou apparent de Poisson et de Cauchy dans ce que dit Coriolis, sans s'en être probablement bien rendu compte, « que celui-ci a eu égard à la dilatation latérale qui accompagne la compression. » Le fait est que cette dilatation des barres dans le sens transversal n'entre nullement et ne devait point entrer dans les résultats de Cauchy, relatifs au détail de ce qui se passe depuis le choc, ni dans la manière dont il a dû les obtenir; et elle n'a aucun besoin d'être prise en considération dans la détermination des mouvements longitudinaux, pas plus que dans les évaluations des forces vives dues aux mouvements des centres de gravité.

Désirant, depuis longtemps, trouver quelle est la vraie solution de cette intéressante question de mécanique physique, j'ai, par une intégration en termes finis des équations qui la régissent, et par une sommation des séries de Poisson, reconnu tout d'abord que les deux illustres géomètres s'accordaient complètement, comme cela devait être, dans les résultats analytiques relatifs au temps embrassé par Cauchy. Ils ont même tous deux raison, celui-ci lorsqu'il prononce qu'au bout de ce temps *le choc est terminé*, car les deux barres cessent complètement (comme on verra) d'agir l'une sur l'autre, et celui-là lorsqu'il soutient qu'il faut prendre en considération la compression conservée par la seconde, comme pouvant être cause que leurs extrémités restent contiguës; et c'est ce qui a lieu effectivement, car elles marchent ensuite avec la même vitesse, bien que le centre de gravité de la seconde barre prenne l'avance sur celui de l'autre. Mais cette contiguïté des extrémités dure peu, et elles s'éloignent infailliblement l'une de l'autre dès qu'arrive un deuxième instant, celui où l'ébranlement *a parcouru aller et retour la barre la plus longue*.

En effet, et c'est ce que Poisson n'a pas aperçu, si les deux barres sont considérées comme restant unies au delà de ce dernier instant, les formules montrent qu'à l'endroit du contact *leurs compressions deviennent négatives*, en sorte qu'elles exerceraient l'une sur l'autre une *traction*. Or cela est impossible, puisque les deux barres, sans adhérence l'une avec l'autre, peuvent bien se pousser, mais non pas se tirer mutuellement. Aussi elles se quitteront alors. J'ai trouvé, à cette occasion, quelle est en général la vraie condition de séparation de deux barres à un instant quelconque; condition à substituer à celle de Cauchy, d'*excès de vitesse de la barre allant devant*, qui est insuffisante, et à celle que Poisson exige en outre, *de compressions nulles*, qui (même avec la restriction *ou négatives*) est surabondante. Les tranches comprimées tendent à se dilater, comme on verra, avec des vitesses égales aux produits des compressions par les vitesses de propagation du son dans les barres. C'est seulement après qu'on a diminué ou augmenté de ces produits, ou de ces *vitesses de détente*, les vitesses possédées par les tranches à l'endroit du contact, que la comparaison de leurs deux grandeurs peut indiquer, à un instant donné, s'il doit y avoir ou non séparation. Il n'y a donc nullement lieu à ce renouvellement périodique de l'état primitif que Poisson a cru reconnaître, et

qui s'opérerait effectivement si les deux barres étaient soudées de manière à pouvoir agir l'une sur l'autre aussi bien par traction que par pression. Leur choc, lorsqu'elles sont d'égale section et de même matière, a bien l'issue qui a été annoncée par Cauchy.

Mais, d'un autre côté, en ce qui regarde la force vive après le choc, le grand analyste, comme on voit par sa troisième conclusion ci-dessus, prenait pour telle celle qui est due aux vitesses *effectives* des tranches des barres. A ce compte il n'y aurait jamais *aucune perte*, car en ajoutant, comme il convient, à cette force vive *actuelle* celle qui est *en réserve* ou accumulée sous forme de potentiel ou de travail, c'est-à-dire celle que la compression opérée est capable d'engendrer ou de restituer ensuite, on a, à chaque instant, une somme égale à *toute* la force vive primitive. Il faut évaluer autrement la force vive résidue utile, à savoir, et suivant l'idée de Coriolis, en attribuant à tous les points de chaque barre la vitesse de *translation* possédée par cette barre, c'est-à-dire *la vitesse de son centre de gravité*. Tout le reste ne produit qu'un mouvement vibratoire qui, destiné à être dissipé au dehors, pourra bien dans l'avenir, après être devenu atomique, se trouver utilisé comme chaleur dans quelque machine capable de le transformer et de le rendre translatoire, mais qui n'en est pas moins entièrement *perdu* pour la translation prochaine de la barre à laquelle il appartient présentement.

Or, en évaluant la perte de cette manière rationnelle, elle n'est pas seulement de *moitié*, comme dit Cauchy, lorsqu'une des deux barres est considérablement plus longue que l'autre, elle s'élève alors jusqu'à la *totalité* de la force vive imprimée, les vitesses étant toujours supposées, comme il le fait, de sens contraire et en raison inverse des longueurs des deux barres.

Nous allons dans une première Partie (nos 2 à 7) démontrer ces résultats, et déterminer la suite des vitesses et des compressions en montrant la conformité énoncée des résultats de Poisson et de Cauchy. Nous calculerons même ces deux quantités jusqu'à toute époque, en supposant avec Poisson que les deux barres restent unies ou n'en font qu'une seule; nous attribuerons même d'abord aux vitesses et aux compressions initiales des grandeurs fonctions quelconques de l'abscisse ou de la distance de chaque tranche à une extrémité.

Puis, en supposant une barre composée de deux ou plusieurs parties qui possédaient initialement une *vitesse* et une *compression* uniforme données, nous établirons des formules qui nous mettront à même, plus loin, de calculer, et de figurer clairement par une épure, ce que deviennent deux barres après leur choc, et de bien déterminer si leur séparation se continuera ou si leurs vibrations pourront être causes qu'elles se rejoignent.

Nous prouverons de cette manière, sans aucune espèce d'incertitude, que quand les deux barres sont de même grosseur et de même matière, *la plus courte prend finalement et uniformément, en perdant toute compression, la vitesse primitive de la plus longue*, ce qui permet de calculer immédiatement la vitesse du centre de gravité de celle-ci, et par suite la perte totale éprouvée par la force vive de translation.

Ce résultat, découvert analytiquement par Cauchy en 1826, a été trouvé aussi dernièrement et démontré d'une manière élémentaire par MM. William Thomson et Tait, dans un ouvrage sous presse [*], ce que j'ai appris, depuis la lecture de mon Mémoire et son insertion par extrait aux *Comptes rendus* et aux *Mondes* [**), par l'envoi qui m'a été fait d'un numéro du journal *The Engineer* [***], où le savant M. Macquorn-Rankine, après avoir cité, dans des termes dont je le remercie, mon travail auquel il attribue une grande importance non moins pratique que scientifique, donne, du premier des principaux résultats analytiques de la seconde Partie, une démonstration élémentaire ingénieuse, qui diffère un peu de celle que je venais d'envoyer à l'impression.

Cette seconde Partie ci-après (n° 8 et suivants) est relative au cas général du choc ou du mouvement simultané de deux barres qui sont de grosseurs et de matières différentes. Je donne une solution en série transcendante qui convient même quand leur forme est celle d'un tronc de pyramide ou de cône, et s'étendrait même à deux fuseaux ou autres

[*] Intitulé *A Treatise of Natural Philosophy*, sections 302, 303, 304, 305.

[**] Numéro du 10 janvier 1867, p. 69.

[***] Du 15 février 1867, p. 133.

solides composés de pareils troncs, et une solution en termes finis applicable quand les formes sont prismatiques. Alors, si l'ébranlement ou le son *parcourt leurs deux longueurs dans le même temps*, la perte de force vive est nulle et les vitesses finales sont celles que donnent les formules de la théorie ordinaire, enseignée dans tous les Traités de physique. Lorsque cela n'a point lieu, il y a une perte, et il faut recourir, pour avoir les vitesses, à des formules nouvelles. Le choc des deux barres se termine, si leur matière est la même, lorsque l'ébranlement ou le son qui s'y propage a parcouru aller et retour celle des deux qui est la plus mince ou dont la section transversale a le moins de superficie; et, plus généralement, si leurs matières sont différentes, lorsque le son a ainsi parcouru *celle des deux dont la portion ébranlée ou comprimée à chaque instant a la masse la plus petite*. Quand cette barre est aussi celle des deux que le son met le moins de temps à parcourir dans toute sa longueur, elle se sépare de l'autre sans garder de compression, et l'on a des formules très-simples pour sa vitesse et pour celle du centre de gravité de l'autre barre. Mais lorsque le contraire a lieu, comme le son, à l'instant de la séparation, peut avoir parcouru en deux sens plusieurs fois l'une des deux barres en se réfléchissant à son extrémité libre et en se *réfractant* en quelque sorte pour passer chaque fois dans la plus longue avec une autre vitesse, l'état de compression et de mouvement des deux parties de la première des deux barres, au moment de leur séparation, s'exprime en des termes nécessairement plus composés, où le nombre des doubles réflexions entre en exposant. Toutefois leurs vitesses de translation, après le choc, peuvent être exprimées encore sous une forme assez simple.

Je donne, des formules de ce second cas comme de celles du premier, des démonstrations élémentaires susceptibles d'être introduites dans les cours de physique. Et je démontre à cette occasion, d'une manière très-simple, l'expression connue de la vitesse de propagation du son, due à Newton, ce qui n'a pas été fait à ma connaissance depuis qu'il en a lui-même indiqué une démonstration qu'aucun professeur n'a jugée acceptable et susceptible d'être introduite dans l'enseignement, même en en modifiant les termes.

Une discussion délicate prouve, comme on verra, que l'état vibratoire final des barres ne produit toujours pas de rencontre nouvelle

entre les extrémités qui se sont quittées, en sorte que les formules données pour les deux cas généraux représentent bien les vitesses définitives des centres de gravité après le choc, et permettent de calculer la force vive qui est perdue pour la translation ultérieure.

2. Détermination, en expressions de forme finie, du mouvement longitudinal d'une barre élastique prismatique et homogène, libre, en partant d'un état initial quelconque. — Soient :

a la longueur de cette barre ;

m sa masse par unité de longueur ;

k la vitesse de propagation longitudinale du son ou d'un ébranlement à travers sa matière, vitesse qui est égale, comme on sait, à la racine carrée du quotient de son module d'élasticité d'extension ou de contraction par sa densité ;

x l'abscisse d'une de ses tranches ou sections transversales, ou sa distance au point où se trouve l'extrémité de gauche dans l'état *naturel* de la barre, ou avant toute compression de ses parties ;

$x + u$ la même abscisse au bout du temps t , ou u le déplacement éprouvé par la section ou la tranche infiniment mince ;

$j = -\frac{du}{dx}$ et $v = \frac{du}{dt}$ la contraction ou compression, et la vitesse de la même tranche au même instant ;

φx , ψx les fonctions de x exprimant les valeurs initiales, ou pour $t = 0$, du déplacement u et de la vitesse v .

L'équation différentielle indéfinie du problème est

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = k^2 \frac{d^2 u}{dx^2};$$

et les équations définies, vu qu'il n'y a aucune contraction à des extrémités libres, et en désignant par $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a}$, $(u)_{t=0}$, etc. les valeurs de $\frac{du}{dx}$, u , etc., pour $x = a$, $t = 0$, etc. (*), sont :

[*] Cette notation commode est de M. Phillips. Nous emprunterons encore tout à l'heure, sauf un léger changement, les notations telles que $f(\zeta) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ à un Mémoire

$$(2) \quad \text{Aux limites : } \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=a} = 0;$$

$$(3) \quad \text{Initialement } \begin{cases} (u)_{t=0} = \varphi x, \\ \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = \psi x, \end{cases}$$

On y satisfait par

$$(4) \quad u = f(x + kt) + F(x - kt),$$

si f et F sont deux fonctions telles, que

$$(5) \quad \begin{cases} f'(kt) + F'(-kt) = 0 \\ f'(a + kt) + F'(a - kt) = 0 \end{cases} \quad \text{de } t = 0 \quad \text{à } t = x,$$

$$(6) \quad \begin{cases} f(x) + F(x) = \varphi x \\ kf'(x) - kF'(x) = \psi x \end{cases} \quad \text{de } x = 0 \quad \text{à } x = a.$$

Comme u est simplement somme de ces fonctions f , F , on peut, sans altérer sa grandeur, ajouter une constante quelconque à l'une pourvu qu'on la retranche de l'autre; d'où il suit que toute constante peut être arbitrairement ajoutée à leur différence $f - F$, sans qu'il en résulte aucun changement dans la valeur de l'inconnue u .

Il résulte de cette remarque que si l'on veut avoir le déplacement u à un instant quelconque, on peut, analogiquement à ce que Poisson indique d'après d'Alembert et Euler pour obtenir les déplacements transversaux de la *corde vibrante* [*], intégrer les deux membres de la seconde équation de condition (6) multipliée par dx , pour une

de 1864 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 25) où le même Savant a appliqué à la *Solution de divers problèmes de Mécanique*, d'une nature délicate, avec le talent qu'on lui connaît et en les généralisant d'une manière remarquable, deux méthodes employées pour la première fois, l'une par Poisson en 1819 (*Sur le mouvement des fluides élastiques et la théorie des instruments à vent*, *Mémoires de l'Institut*, 1817, § 2, nos 18 et 19), l'autre par M. Duhamel en 1843 (*Sur un phénomène relatif à la communication du mouvement vibratoire*, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII, p. 122, formule 17).

[*] *Mécanique*, nos 484, 485.

limite inférieure choisie arbitrairement, zéro par exemple, ce qui, en faisant

$$(7) \quad \int_0^x \psi x \, dx = \Psi x,$$

et en appelant d'une manière générale, avec Poisson, ζ la variable des fonctions f, F dont il s'agit de déterminer la forme, fournira

$$(8) \quad f\zeta - F\zeta = \frac{1}{k} \Psi \zeta.$$

On en tire déjà, en combinant avec la première (6),

$$(9) \quad \begin{cases} f\zeta = \frac{1}{2} \varphi \zeta + \frac{1}{2k} \Psi \zeta \\ F\zeta = \frac{1}{2} \varphi \zeta - \frac{1}{2k} \Psi \zeta \end{cases} \quad \text{pour } \zeta = \text{de } 0 \text{ à } a.$$

On obtiendra ensuite les valeurs des deux mêmes fonctions hors des limites $0, a$ de leur variable en intégrant depuis $\zeta = 0$ les deux équations de condition (5) multipliées par dt ; d'où, eu égard à ce que (8) donne $f(0) - F(0) = 0$, $f(a) - F(a) = \frac{1}{k} \Psi a$, et en écrivant ensuite ζ au lieu de $-kt$ dans la première et de $a + kt$ dans la seconde,

$$(10) \quad \begin{cases} F(\zeta) = f(-\zeta) & \text{pour } \zeta = \text{de } 0 \text{ à } -\infty, \\ f(\zeta) = F(2a - \zeta) + \frac{1}{k} \Psi a & \text{pour } \zeta = \text{de } a \text{ à } +\infty. \end{cases}$$

La première de ces deux nouvelles équations donnera $F\zeta$ pour $\zeta = \text{de } 0 \text{ à } -a$, puisque par (9) on a $f(-\zeta)$ pour $-\zeta$ de 0 à a ; et la seconde donnera $f\zeta$ pour $\zeta = \text{de } a \text{ à } 2a$, puisque par (9) on a $F(2a - \zeta)$ pour $2a - \zeta = \text{de } a \text{ à } 0$. Ensuite la première (10) donnera $F\zeta$ pour $\zeta = \text{de } -a \text{ à } -2a$ au moyen de ce que la seconde vient de donner $f(-\zeta)$ pour $-\zeta = \text{de } a \text{ à } 2a$; puis la seconde donnera $f\zeta$ pour $\zeta = \text{de } 2a \text{ à } 3a$ au moyen de ce que la première a donné $F(2a - \zeta)$ pour $2a - \zeta = \text{de } 0 \text{ à } -a$; et la première donnera à son tour $F\zeta$ de $\zeta = -2a \text{ à } -3a$ puisqu'on vient d'obtenir $f(-\zeta)$ de $-\zeta = 2a \text{ à } -\zeta = 3a$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

En sorte qu'on aura tout ce qu'il faut pour déterminer les valeurs du déplacement u relatives à tous les points de la barre et à tous les temps t .

Mais, pour notre objet, il est surtout nécessaire de connaître la suite des vitesses et des contractions

$$(11) \quad \begin{cases} v = \frac{du}{dt} = kf'(x + kt) - kF'(x - kt), \\ j = -\frac{du}{dx} = -f'(x + kt) - F'(x - kt), \end{cases}$$

qui, une fois connues, fournissent d'ailleurs facilement la suite des déplacements. Il nous suffit, ainsi, de déterminer les dérivées f' et F' des deux fonctions. Nous n'avons donc pas besoin d'intégrer trois des quatre équations de condition (5), (6); elles donnent directement, en différentiant au contraire la troisième,

$$(12) \quad \begin{cases} f'\zeta = \frac{1}{2}\varphi'\zeta + \frac{1}{2k}\psi\zeta \\ F'\zeta = \frac{1}{2}\varphi'\zeta - \frac{1}{2k}\psi\zeta \end{cases} \quad \text{pour } \zeta = \text{de } 0 \text{ à } a,$$

$$(13) \quad \begin{cases} F'\zeta = -f'(-\zeta) & \text{pour } \zeta = \text{de } 0 \text{ à } -\infty, \\ f'\zeta = -F'(2a - \zeta) & \text{pour } \zeta = \text{de } a \text{ à } +\infty. \end{cases}$$

D'où successivement, en opérant comme on a dit tout à l'heure, et en désignant généralement ainsi

$$(14) \quad \begin{cases} \zeta = \frac{n'}{n}, & 2a - \zeta = \frac{n'}{n}, & \zeta = \frac{n''}{n}, \dots, \\ f'\left(\zeta = \frac{n'}{n}\right), & F'\left(2a - \zeta = \frac{n'}{n}\right), & f'\left(\zeta = \frac{n''}{n}\right), \dots \end{cases}$$

les valeurs de ζ ou de $2a - \zeta, \dots$ comprises entre deux nombres n, n' ou n', n'' , et celles de leurs fonctions f', F' , on aura le tableau sui-

vant :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & F' \left(\zeta = \frac{0}{a} \right) = \frac{1}{2} \varphi' \zeta - \frac{1}{2k} \psi \zeta, \\
 & f' \left(\zeta = \frac{a}{0} \right) = \frac{1}{2} \varphi' \zeta + \frac{1}{2k} \psi \zeta, \\
 & F' \left(\zeta = \frac{-a}{0} \right) = -f' \left(-\zeta = \frac{a}{0} \right) = -\frac{1}{2} \varphi' (-\zeta) - \frac{1}{2k} \psi (-\zeta), \\
 & f' \left(\zeta = \frac{2a}{a} \right) = -F' \left(2a - \zeta = \frac{0}{a} \right) = -\frac{1}{2} \varphi' (2a - \zeta) + \frac{1}{2k} \psi (2a - \zeta), \\
 & F' \left(\zeta = \frac{-2a}{-a} \right) = -f' \left(-\zeta = \frac{2a}{a} \right) = \frac{1}{2} \varphi' (2a + \zeta) - \frac{1}{2k} \psi (2a + \zeta), \\
 & f' \left(\zeta = \frac{3a}{2a} \right) = -F' \left(2a - \zeta = \frac{-a}{0} \right) = \frac{1}{2} \varphi' (\zeta - 2a) + \frac{1}{2k} \psi (\zeta - 2a), \\
 & F' \left(\zeta = \frac{-3a}{-2a} \right) = -f' \left(-\zeta = \frac{3a}{2a} \right) = -\frac{1}{2} \varphi' (-\zeta - 2a) - \frac{1}{2k} \psi (-\zeta - 2a), \\
 & f' \left(\zeta = \frac{4a}{3a} \right) = -F' \left(2a - \zeta = \frac{-2a}{-a} \right) = -\frac{1}{2} \varphi' (4a - \zeta) + \frac{1}{2k} \psi (4a - \zeta), \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

contenu dans ces deux formules, où i représente un nombre entier positif ou nul, et où chaque expression du second membre est relative aux intervalles correspondants des valeurs de ζ dans les premiers :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & f' \left(\zeta = \frac{(2i+2)a}{2ia} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \varphi' \left[(2i+2)a - \zeta = \frac{a}{0} \right] + \frac{1}{2k} \psi \left[(2i+2)a - \zeta = \frac{0}{a} \right]; \\ \frac{1}{2} \varphi' \left[\zeta - 2ia = \frac{a}{0} \right] + \frac{1}{2k} \psi \left[\zeta - 2ia = \frac{a}{0} \right]; \end{cases} \\ & F' \left(\zeta = \frac{-(2i+1)a}{-(2i-1)a} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \varphi' \left[-2ia - \zeta = \frac{a}{0} \right] - \frac{1}{2k} \psi \left[-2ia - \zeta = \frac{a}{0} \right]; \\ \frac{1}{2} \varphi' \left[2ia + \zeta = \frac{0}{a} \right] - \frac{1}{2k} \psi \left[2ia + \zeta = \frac{0}{a} \right]. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

La périodicité de ces expressions, encore plus manifestée par les deux formules *promotrices* suivantes, qui sont la conséquence des deux formules (13),

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & f' \left(\zeta = \frac{\infty}{2a} \right) = f'(\zeta - 2a), \\ & F' \left(\zeta = \frac{-\infty}{-a} \right) = F'(\zeta + 2a), \end{aligned} \right.$$

permettrait, pour composer les valeurs successives (11) de ν et de j , de se servir d'un procédé graphique comme celui qu'indique Poisson (*Mécanique*, n° 486) d'après Euler (*Académie de Berlin*, 1748) pour avoir les formes successives de la corde vibrante, procédé au moyen duquel Monge avait construit un relief représentant clairement la suite de ces formes [*]. Mais on obtiendra numériquement des valeurs exactes en divisant le temps t ou l'espace kt parcouru par l'ébranlement dans les deux sens, en une suite de parties, dépendant de l'abscisse x du point considéré, et entre les limites desquelles chacun des deux binômes $x + kt$, $x - kt$ se trouve compris dans les intervalles

$$\begin{matrix} a & 2a & 3a & \dots & \text{ou} & 0 & -a & -2a & \dots \\ 0 & a & 2a & \dots & & a & 0 & -a & \dots \end{matrix}$$

assignés à ξ au tableau (15). Ces divisions sont données par le double tableau suivant, où l'on a dû distinguer les points en deçà et les points au delà du milieu de la barre :

[*] J'ai construit moi-même deux de ces reliefs, dont il se trouve des exemplaires en plâtre aux collections de l'École Polytechnique, des Écoles des Ponts et Chaussées et des Mines, du Conservatoire des Arts et Métiers, et de la Faculté de Poitiers. Je les avais faits à l'occasion du modelage d'un relief bien plus compliqué, qui se trouve aux mêmes collections, et qui représente la suite des états d'une barre élastique appuyée aux extrémités et heurtée transversalement au milieu.

(18)

1^o Points pour lesquels $x < \frac{a}{2}$.

Lorsque kt varie de, 0 à x à $a-x$ à $a+x$ à $2a-x$ à $2a+x$ à $3a-x$ à $3a+x$ à $4a-x$ à . . .
 $x+kt$ varie { de x à $2x$ à a à $a+2x$ à $2a$ à $2a+2x$ à $3a$ à $3a+2x$ à $4a$ à . . .
ou à fortiori de 0 à a à $2a$ à $3a$ à $4a$ à . . .
 $x-kt$ varie { de x à 0 à $2x-a$ à $-a$ à $2x-2a$ à $-2a$ à $2x-3a$ à $-3a$ à $2x-4a$ à . . .
ou à fortiori de a à 0 à $-a$ à $-2a$ à $-3a$ à . . .

2^o Points pour lesquels $x > \frac{a}{2}$.

Lorsque kt varie de, 0 à $a-x$ à x à $2a-x$ à $a+x$ à $3a-x$ à $2a+x$ à $4a-x$ à $3a+x$ à . . .
 $x+kt$ varie { de x à a à $2x$ à $2a$ à $a+2x$ à $3a$ à $2a+2x$ à $4a$ à $3a+2x$ à . . .
ou à fortiori de 0 à a à $2a$ à $3a$ à $4a$ à . . .
 $x-kt$ varie { de x à $2x-a$ à 0 à $2x-2a$ à $-a$ à $2x-3a$ à $-2a$ à $2x-4a$ à $-3a$ à . . .
ou à fortiori de a à 0 à $-a$ à $-2a$ à $-3a$ à . . .

En conséquence on a [expressions (11) de ν et de j]:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour les points } x < \frac{a}{2} \text{ et} \\ \text{pour } kt = \begin{Bmatrix} 2a-x \\ a+x \\ a-x \\ x \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad 2\nu = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots -k\varphi'(2a-x-kt) + \psi(2a-x-kt) - k\varphi'(2a+x-kt) + \psi(2a+x-kt); \\ \dots\dots\dots -k\varphi'(2a-x-kt) + \psi(2a-x-kt) + k\varphi'(kt-x) + \psi(kt-x); \\ \dots\dots\dots k\varphi'(x+kt) + \psi(x+kt) + k\varphi'(kt-x) + \psi(kt-x); \\ \dots\dots\dots k\varphi'(x+kt) + \psi(x+kt) - k\varphi'(x-kt) + \psi(x-kt). \end{Bmatrix} \\ \\ \text{Et pour les points } x > \frac{a}{2} \text{ et} \\ \text{pour } kt = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots a+x \\ 2a-x \\ x \\ a-x \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad 2\nu = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots k\varphi'(x+kt-2a) + \psi(x+kt-2a) + k\varphi'(kt-x) + \psi(kt-x); \\ \dots\dots\dots -k\varphi'(2a-x-kt) + \psi(2a-x-kt) + k\varphi'(kt-x) + \psi(kt-x); \\ \dots\dots\dots -k\varphi'(2a-x-kt) + \psi(2a-x-kt) - k\varphi'(x-kt) + \psi(x-kt); \\ \dots\dots\dots k\varphi'(x+kt) + \psi(x+kt) - k\varphi'(x-kt) + \psi(x-kt). \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$

Et $2kj$ = les mêmes expressions que 2ν en changeant les signes des deux premiers termes.

Ce qui donnera complètement l'état de la barre en un point quelconque et à des instants quelconques.

3. *Cas particulier où, initialement, deux ou plusieurs portions $a_1, a_2, a_3, \dots$ de la barre d'une longueur $a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ ont, en tous leurs points, des vitesses $V_1, V_2, V_3, \dots$ avec des contractions ou compressions respectives $J_1, J_2, J_3, \dots$ par unité de longueur.* — Ce cas, dont la solution donne naturellement ce qui arrive dans le choc de deux ou plusieurs barres de même matière et de même section transversale avant qu'elles se séparent, mérite un examen détaillé, parce que la même solution nous servira à connaître sans incertitude ce que deviennent, après une séparation, deux barres quelconques qui se sont heurtées, et à déterminer par conséquent si cette séparation est définitive ou si elle est suivie d'une jonction nouvelle.

Si nous prenons à l'extrémité libre de la première portion a_1 (supposée celle de gauche quand la barre est horizontale ou celle du bas quand elle est verticale) l'origine des x comptées positivement de là à l'extrémité libre de la dernière portion, les vitesses étant comptées positivement aussi dans ce sens, la solution s'obtiendra au moyen des formules (15) du numéro précédent, en scindant, aux limites des portions diverses, les intervalles

$$\begin{matrix} 0 & a & -a & 2a & -2a & 3a \\ a' & 0' & 0' & a' & -a' & 2a' \dots \end{matrix}$$

dans lesquels varie ζ , c'est-à-dire en faisant

$$(20) \quad \varphi' \left(\zeta = \begin{matrix} \dots\dots\dots a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{matrix} \right) = \begin{matrix} \dots\dots\dots \\ -J_3, \\ -J_2, \\ -J_1; \end{matrix} \quad \psi \left(\zeta = \begin{matrix} \dots\dots\dots a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{matrix} \right) = \begin{matrix} \dots\dots\dots \\ v_3, \\ v_2, \\ v_1. \end{matrix}$$

Il en résultera, en supprimant la désignation ζ devenue inutile :

S'il n'y a que deux parties :

$$(21) \left\{ \begin{array}{ll} 2kf' \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_2 + V_2, \\ -kJ_1 + V_1; \end{cases} & 2kF' \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1 - V_1, \\ -kJ_2 - V_2; \end{cases} \\ 2kf' \begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_2 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_1 + V_1, \\ kJ_2 + V_2; \end{cases} & 2kF' \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_2 - V_2, \\ kJ_1 - V_1; \end{cases} \\ 2kf' \begin{pmatrix} 3a_1 + 3a_2 \\ 3a_1 + 2a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_2 + V_2, \\ -kJ_1 + V_1; \end{cases} & 2kF' \begin{pmatrix} -2a_1 - 2a_2 \\ -a_1 - 2a_2 \\ -a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1 - V_1, \\ -kJ_2 - V_2; \end{cases} \\ & 2kF' \begin{pmatrix} -3a_1 - 3a_2 \\ -3a_1 - 2a_2 \\ -2a_1 - 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_2 - V_2, \\ kJ_1 - V_1. \end{cases} \end{array} \right.$$

S'il y en a trois :

$$(22) \left\{ \begin{array}{ll} 2kf' \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_3 + V_3, \\ -kJ_2 + V_2, \\ -kJ_1 + V_1; \end{cases} & 2kF' \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1 - V_1, \\ -kJ_2 - V_2, \\ -kJ_3 - V_3; \end{cases} \\ 2kf' \begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_1 + V_1, \\ kJ_2 + V_2, \\ kJ_3 + V_3; \end{cases} & 2kF' \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - a_3 \\ -a_1 - a_2 \\ -a_1 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{cases} kJ_3 - V_3, \\ kJ_2 - V_2, \\ kJ_1 - V_1; \end{cases} \\ 2kf' \begin{pmatrix} 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 \\ 3a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_3 + V_3, \\ -kJ_2 + V_2, \\ -kJ_1 + V_1; \end{cases} & 2kF' \begin{pmatrix} -2a_1 - 2a_2 - 2a_3 \\ -a_1 - 2a_2 - 2a_3 \\ -a_1 - a_2 - 2a_3 \\ -a_1 - a_2 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} -kJ_1 - V_1, \\ -kJ_2 - V_2, \\ -kJ_3 - V_3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Et ainsi de suite.

Bornons-nous d'abord à deux parties a_1, a_2 .

On voit que f' ou F' garde une même valeur quand sa variable $\zeta = x \pm kt$ reste entre deux des limites consécutives $\pm i_1 a_1 \pm i_2 a_2$ des intervalles spécifiés, et change de valeur brusquement quand une des limites est franchie. Or, si l'on considère une valeur de t et une valeur de x pour lesquelles la variable $x \pm kt$ est égale justement à une de ces limites, elle lui restera égale quand t croîtra d'une quantité Δt pourvu que x décroisse ou croisse en même temps de $k\Delta t$, c'est-à-dire pourvu que le point déterminé par x recule ou avance, sur la barre, avec une vitesse k .

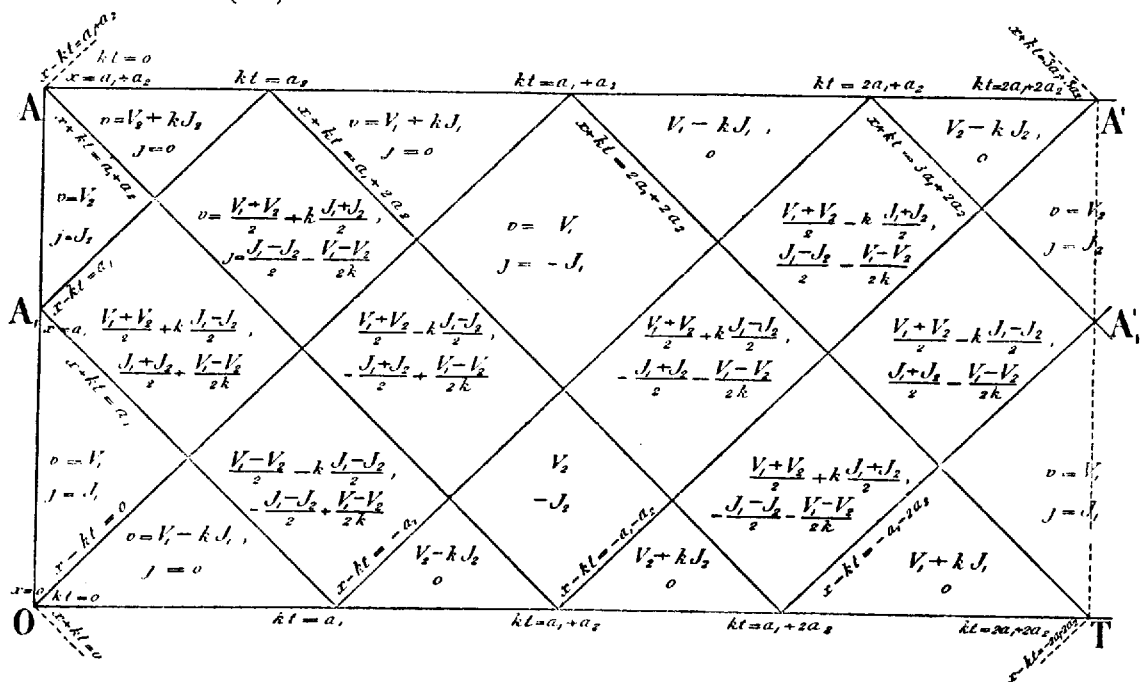
Qu'on imagine donc quatre points mobiles qui, en partant des deux extrémités de la barre, et de la jonction ($x = a_1$) de ses deux parties, la parcourent dans les deux sens avec cette vitesse k et se réfléchissent avec la même vitesse quand ils arrivent aux extrémités; ces points, que nous appellerons *points d'ébranlement*, marqueront les endroits où l'une des deux fonctions $f'(x + kt)$, $F'(x - kt)$, et par conséquent la vitesse v ou la compression j , passe brusquement d'une grandeur à une autre le long de la barre à un instant donné quelconque.

Pour nous reconnaître dans cette complication et déterminer sans méprise la suite des valeurs de v et de j , constantes entre des limites qui varient, figurons la marche des quatre points d'ébranlement en prenant pour abscisses les temps t ou plutôt les produits

$$kt$$

comptés sur une droite OT, et, pour ordonnées, les x comptés paral-

(23)



lèlement à une orthogonale OA, A dont les portions

$$OA_1 = a_1, \quad A_1A = a_2$$

représentent les deux parties de la barre. Portons, à partir de A et de O, sur une parallèle AA' à OT, et sur OT elle-même, des longueurs

$$\begin{array}{ccccccc} kt = a_2, & a_1 + a_2, & 2a_1 + a_2, & 2a_1 + 2a_2, & \dots \\ a_1, & a_1 + a_2, & a_1 + 2a_2, & 2a_1 + 2a_2, & \dots, \end{array}$$

et joignons leurs extrémités entre elles et avec O, A₁, A, A'₁; les lignes inclinées à 45 degrés ainsi obtenues donneront les traces que laisseraient, sur le plan de la figure, nos quatre points mobiles, si tous les points matériels de la barre OA, A étaient transportés sur ce plan, dans des directions transversales ou parallèles à OT, avec une vitesse k , égale à celle avec laquelle ces points fictifs se déplacent le long de la barre (en négligeant ici ce qui résulte des petites contractions qu'elle éprouve); et les équations

$$\begin{array}{l} x + kt = a_1, \quad x + kt = a_1 + a_2, \quad x + kt = a_1 + 2a_2, \dots \\ x - kt = a_1, \quad x - kt = 0, \quad x - kt = -a_1, \quad x - kt = -a_1 - a_2, \dots \end{array}$$

de ces lignes, que nous y avons écrites, ou les valeurs de x en t qu'on en tire, donneront pour chaque instant la situation de ces mêmes points mobiles sur la barre, ou leur distance x à son extrémité $x = 0$.

Or, un point quelconque de la figure, situé entre deux des lignes qui *descendent* de gauche à droite (prolongées au besoin au dehors) a son x compris entre ceux

$$x = i_1 a_1 + i_2 a_2 - kt,$$

tirés des équations écrites sur ces deux lignes inclinées, en sorte que la valeur de $x + kt$ relative à l'instant et au point matériel qu'il représente est comprise entre les deux valeurs

$$i_1 a_1 + i_2 a_2$$

occupant les seconds membres.

Le même x de ce point particulier de la figure a sa valeur comprise entre celles qu'on tire des équations $x - kt = \dots$, écrites sur les deux lignes *ascendantes* qui comprennent aussi ce point; la valeur de $x - kt$

qui y répond est donc comprise entre les deux seconds membres correspondants monômes ou polynômes de ces équations.

Ainsi, par exemple, en considérant les points du tableau à l'intérieur du rectangle à gauche, dont un des angles est en A_1 , et dont les deux côtés descendants ont pour équations

$$x + kt = a_1, \quad x + kt = a_1 + a_2,$$

et les deux côtés ascendants ont pour équations

$$x - kt = a_1, \quad x - kt = 0,$$

on aura nécessairement, pour tous ces points,

$$x + kt = \frac{a_1 + a_2}{a_1}, \quad x - kt = \frac{0}{a_1},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} v &= kf' \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1} \right) - kF' \left(\frac{0}{a_1} \right), \\ j &= -f' \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1} \right) - F' \left(\frac{0}{a_1} \right). \end{aligned}$$

De même pour tous les points de la barre et tous les instants se trouvant représentés, ordonnées x et abscisses kt , par les points de l'intérieur du rectangle situé symétriquement au premier, sur la droite du tableau, on aura

$$\begin{aligned} v &= kf' \left(\frac{3a_1 + 2a_2}{2a_1 + 2a_2} \right) - kF' \left(\frac{-a_1 - 2a_2}{-a_1 - a_2} \right), \\ j &= -f' \left(\frac{3a_1 + 2a_2}{2a_1 + 2a_2} \right) - F' \left(\frac{-a_1 - 2a_2}{-a_1 - a_2} \right). \end{aligned}$$

Substituant à ces f' et F' leurs valeurs en V_1, V_2, J_1, J_2 données par les suites (21), on a pour le premier rectangle, par exemple,

$$\begin{aligned} v &= \frac{-kJ_2 + V_2}{2} - \frac{-kJ_1 - V_1}{2} = \frac{V_1 + V_2}{2} + k \frac{J_1 - J_2}{2}, \\ j &= -\frac{-kJ_2 + V_2}{2k} - \frac{-kJ_1 - V_1}{2k} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2k}. \end{aligned}$$

Si l'on opère de même pour les autres rectangles du tableau, et aussi

pour les triangles de ses bords en se servant, pour ce qui est relatif à quelques-uns, des équations

$$\begin{aligned}x - kt &= a_1 + a_2, & x + kt &= 0, \\x + kt &= 3a_1 + 3a_2, & x - kt &= -2a_1 - 2a_2\end{aligned}$$

des quatre lignes inclinées tracées hors du tableau à partir des coins, on aura les diverses valeurs de ν et de j que nous avons écrites dans l'intérieur de tous ces espaces, et qui fournissent les vitesses et les compressions pour tous les points de la barre et pour tous les instants

$$\text{de } t = 0 \quad \text{à } t = \frac{2a_1 + 2a_2}{k}.$$

Cette sorte de diagramme offre la solution complète de la question; car on voit, par ce qui est écrit dans les deux triangles le plus à droite, qu'à ce dernier instant $t = \frac{2a_1 + 2a_2}{k}$ la barre se trouve avoir, sur des longueurs respectivement égales à ses deux parties primitives $OA_1 = a_1$, $A_1A = a_2$, précisément les mêmes vitesses et compressions qu'en commençant, en sorte qu'elle repassera par les mêmes états, et fera de même à des périodes successives $\frac{2a_1 + 2a_2}{k}$.

Cette périodicité, au reste, résulte aussi des suites (21) des valeurs de $2kf'\zeta$, $2kF'\zeta$ entre diverses limites de valeurs de ζ , car elles redeviennent les mêmes lorsque $\zeta = x + kt$ augmente de $2a_1 + 2a_2$, et $\zeta = x - kt$ de $-2a_1 - 2a_2$.

Voici un autre tableau ou diagramme relatif au cas de trois parties

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3.$$

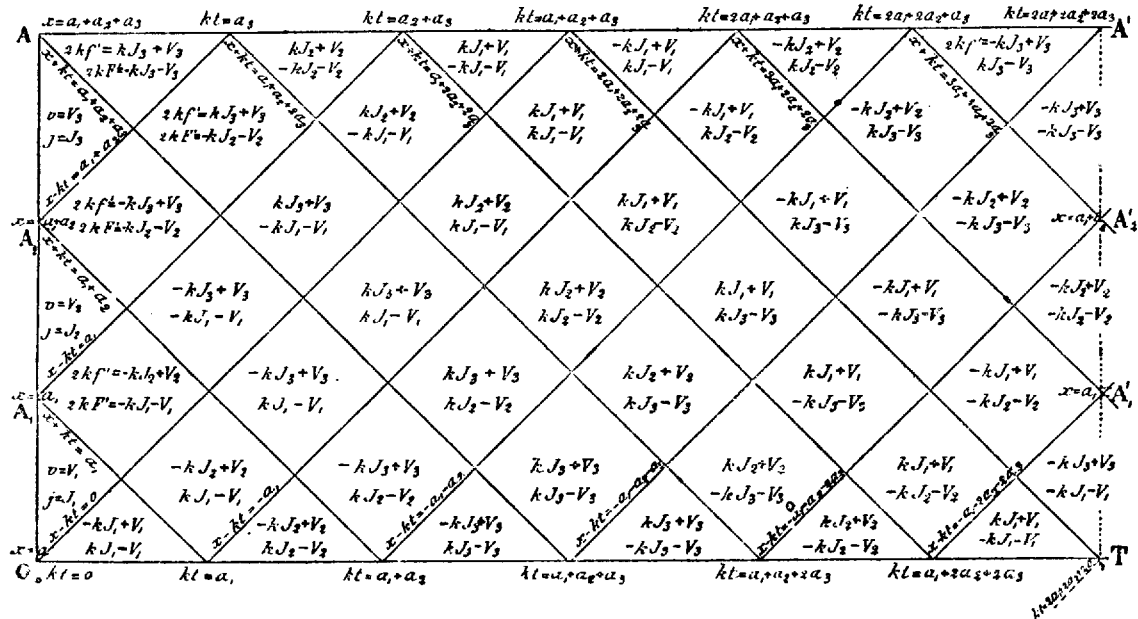
Il fera encore mieux comprendre l'opération précédente et sa facilité pour tous les cas, parce qu'on s'est contenté d'écrire l'une au-dessus de l'autre, dans chacune de ses cases, excepté dans les trois triangles à droite, les valeurs constantes de

$$2kf'(x + kt) \quad \text{et} \quad 2kF'(x - kt),$$

qui donnent immédiatement celles de ν si l'on retranche la deuxième

de la première en divisant par 2, et celles de j si on les ajoute en changeant les signes et divisant par $2k$. On aurait pu se dispenser

(24)



d'écrire, sur les lignes inclinées, leurs équations en x et t , car pour avoir les $\pm i_1 a_1 \pm i_2 a_2 \pm i_3 a_3$ qui en forment les seconds membres, il suffit de prendre : 1° pour les lignes partant de points de OA, les x de ces points; 2° pour les autres lignes descendantes, les kt des points où elles coupent AA', augmentés de $a_1 + a_2 + a_3$; 3° pour les autres lignes ascendantes, les kt des points où elles coupent OT, avec le signe —.

On y voit très-bien que le f' est le même dans tous les espaces compris entre les deux mêmes lignes descendantes, et le F' est le même dans tous ceux que comprennent deux lignes montantes consécutives, en sorte que la construction d'un pareil tableau ou diagramme se fera promptement pour quatre parties et plus au besoin.

Ce diagramme, comme le précédent, prouve, par l'inspection des triangles inférieur et supérieur de gauche, qu'une compression J_1 ou J_3 d'une partie extrême engendre, *par détente*, une vitesse addition-

nelle $-kJ_1$ ou $+kJ_2$, dont le signe dépend du sens où les vitesses sont comptées positivement, et qui est égale à cette compression multipliée par la vitesse de propagation du son dans la barre (voyez le n° 15).

4. *Problème du choc longitudinal de deux barres de longueur a_1, a_2 parfaitement élastiques, de même matière et de même section, animées primitivement de vitesses uniformes V_1, V_2 sans compression initiale.*

— En prenant, comme au numéro précédent, le sens de a_1 à a_2 pour celui selon lequel on compte positivement les vitesses, ainsi que les abscisses x , dont l'origine est placée à l'extrémité libre de a_1 , il faudra, pour que les deux barres puissent se rencontrer, qu'on ait, *quels que soient les signes de V_1, V_2 ,*

$$(25) \quad V_1 - V_2 > 0.$$

Supposons aussi que

$$(26) \quad a_1 < a_2,$$

ce qui est toujours permis, car cela revient à prendre pour origine des x et du sens des vitesses regardées comme positives l'extrémité non heurtée de la plus courte des deux barres.

Comme elles resteront quelque temps jointes bout à bout, leur mouvement, au moins en commençant, sera le même que celui de deux portions a_1, a_2 d'une même barre. Il se déterminera en faisant dans les formules du numéro précédent

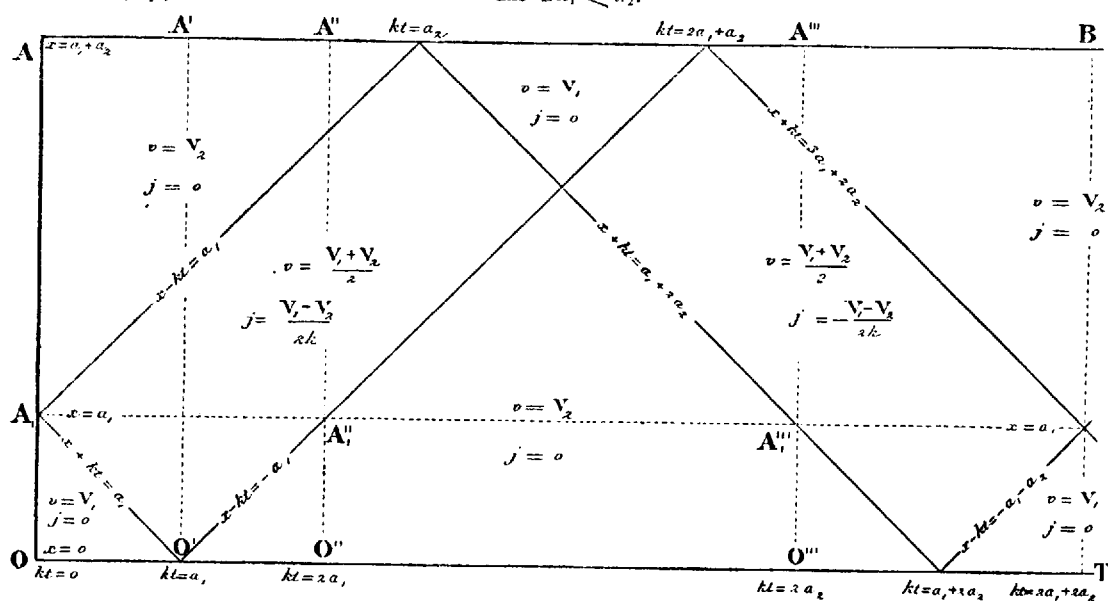
$$J_1 = 0, \quad J_2 = 0.$$

Cela réduit le diagramme (23) à l'un des deux suivants, où ne figurent plus les quatre lignes inclinées parties de O et de A, puisqu'il n'y a à considérer que les deux points mobiles d'ébranlement partis du point de jonction A. On y a tracé, pour la discussion ci-après, dans les positions O'A', O''A'', O'''A''', en lignes ponctuées, la barre transportée parallèlement à elle-même avec une vitesse transversale k , aux distances répondant aux temps $t = \frac{a_1}{k}, \frac{2a_1}{k}, \frac{2a_2}{k}$.

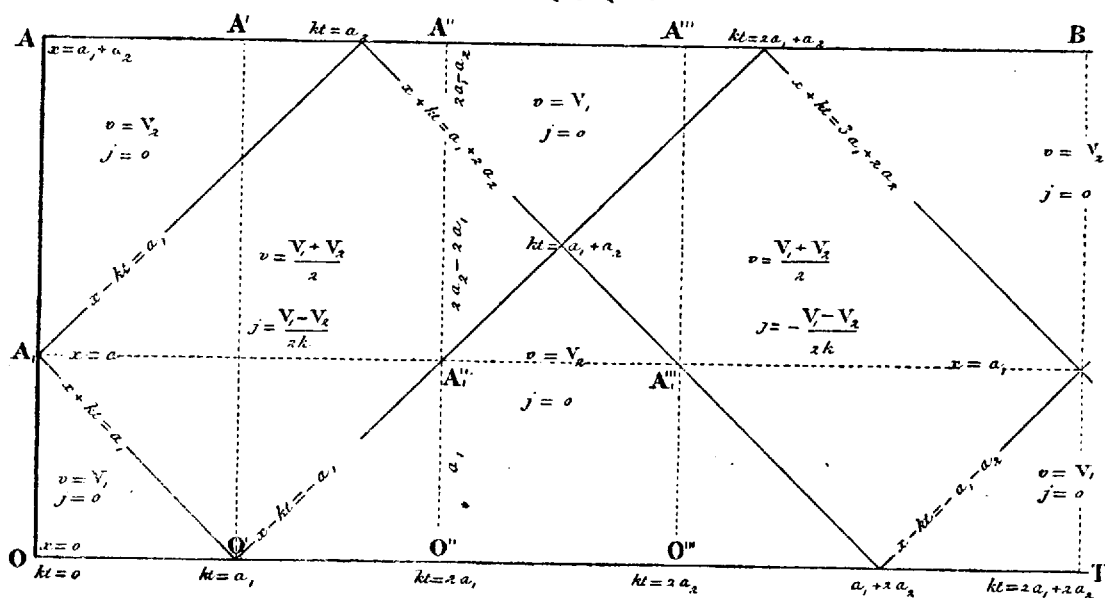
On voit par la partie de gauche qu'à partir de l'instant $t = 0$ qui est

celui de la jonction, et de part et d'autre du point $x = a_1$, où elle s'opère, les vitesses initiales V_1, V_2 disparaîtront dans deux portions

(27)

CAS $2a_1 < a_2$.

(28)

CAS $a_1 < a_2 < 2a_1$.

égales et uniformément croissantes kt des deux barres; et ces portions offriront dans chaque tranche une nouvelle vitesse

$$\frac{V_1 + V_2}{2},$$

avec un degré de compression mesuré par

$$\frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

Mais, après un premier temps

$$t = \frac{a_1}{k},$$

la portion de la seconde barre, qui est la plus longue, continue seule de croître; la portion de la première, qui est venue à en embrasser la totalité, décroît avec la même célérité k , à commencer de son extrémité $x = 0$ ou O' , et elle est remplacée par une portion, de longueur $kt - a_1$, dont les tranches ont la vitesse V_2 possédée initialement par la deuxième barre, et n'ont plus de compression.

En sorte qu'au bout d'un second temps $\frac{a_1}{k}$, ou pour

$$t = 2 \frac{a_1}{k},$$

toute la barre a_1 se trouve avoir la vitesse primitive V_2 de la barre a_2 avec une compression nulle partout; tandis que la barre a_2 a encore la vitesse $\frac{V_1 + V_2}{2}$ et la compression $\frac{V_1 - V_2}{2k}$ sur une certaine longueur comptée à partir du point de jonction. Cette longueur est

$2a_1$ si $2a_1 < a_2$, ce qui est le cas du diagramme (27);

et $a_1 - (2a_1 - a_2) = 2a_2 - 2a_1$ si $2a_1 > a_2$, ce qui est le cas du diagramme (28).

Le reste de cette deuxième barre conserve sa vitesse primitive V_2 dans le premier cas et prend, dans le second, celle V_1 que possédait initialement la première barre a_1 .

C'est identiquement, et sauf l'hypothèse d'immobilité du centre de gravité commun faite par Cauchy, le détail de ce qu'il annonce avoir trouvé jusqu'à l'instant $t = 2 \frac{a_1}{k}$ où il s'arrête.

Avant d'examiner si les deux barres se sépareront, comme il le pense, à cet instant ou à l'un de ceux qui suivent, ou si elles resteront unies comme le pense Poisson, assurons-nous qu'une seconde méthode de calcul, celle que ce dernier Savant a employée, fournit exactement les mêmes résultats.

5. *Solution du même problème en série trigonométrique. Accord avec l'autre.* — Cette solution, donnée par Poisson, du problème du numéro précédent, c'est-à-dire de l'équation

$$(29) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = k^2 \frac{d^2 u}{dx^2}$$

avec

$$(30) \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a_1+a_2} = 0,$$

$$(31) \quad (u)_{t=0} = 0,$$

$$(32) \quad (v)_{t=0} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \begin{cases} V_1 & \text{de } x = 0 \text{ à } x = a_1 \\ V_2 & \text{de } x = a_1 \text{ à } x = a_1 + a_2 \end{cases}$$

est, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et $\sum$ une somme relative à toutes les valeurs du nombre entier positif i de 1 à ∞ , donnée par

$$(33) \quad v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + 2 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum \frac{1}{i} \sin \frac{i \pi a_1}{a_1 + a_2} \cos \frac{i \pi x}{a_1 + a_2} \cos \frac{i \pi k t}{a_1 + a_2},$$

$$(34) \quad j = 2 \frac{V_1 - V_2}{\pi k} \sum \frac{1}{i} \sin \frac{i \pi a_1}{a_1 + a_2} \sin \frac{i \pi x}{a_1 + a_2} \sin \frac{i \pi k t}{a_1 + a_2};$$

formules obtenues en tirant $\frac{du}{dt} = v$ et $-\frac{du}{dx} = j$ de l'expression

$$(35) \quad u = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} t + 2 \frac{a_1 + a_2}{\pi^2} \cdot \frac{V_1 - V_2}{k} \sum \frac{1}{i^2} \sin \frac{i \pi a_1}{a_1 + a_2} \cos \frac{i \pi x}{a_1 + a_2} \sin \frac{i \pi k t}{a_1 + a_2},$$

qui satisfait évidemment aux quatre premières proposées (29), (30), (31); et qui vérifie aussi la dernière, relative aux vitesses initiales : car, si après avoir fait $t = 0$ ou $\cos \frac{i\pi kt}{a_1 + a_2} = 1$ dans l'équation (33) et l'avoir multipliée par $dx \cos \frac{i\pi x}{a_1 + a_2}$, l'on intègre ses deux membres de $x = 0$ à $x = a_1 + a_2$ en mettant, à la place du premier membre v , V_1 pour la partie de l'intégrale de 0 à a_1 et V_2 pour la partie de a_1 à $a_1 + a_2$, le $\sum$ se réduit à un seul terme, savoir celui pour lequel i a la même valeur que dans le multiplicateur introduit, tous les autres termes s'annulant; et il reste

$$V_1 \frac{a_1 + a_2}{i\pi} \sin \frac{i\pi a_1}{a_1 + a_2} + V_2 \frac{a_1 + a_2}{i\pi} \left(- \sin \frac{i\pi a_1}{a_1 + a_2} \right) = 2 \frac{V_1 - V_2}{i\pi} \frac{a_1 + a_2}{2} \sin \frac{i\pi a_1}{a_1 + a_2},$$

ou une identité. Le premier des deux termes de l'expression (33) de v disparaît dans cette vérification; mais on en justifie la composition en intégrant de 0 à $a_1 + a_2$ les deux membres multipliés simplement par dx .

Maintenant, pour reconnaître la conformité des résultats de ces deux formules en série (33) et (34) avec ceux du tableau (27) ou (28), sommons les $\sum$ en nous servant, comme Poisson, d'une formule générale

$$(36) \quad 1 - \theta = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \sin i\pi\theta \text{ quand } \theta = \text{de } 0 \text{ à } 2;$$

qui se construit ou se démontre en posant d'abord

$$1 - \theta = \sum A \sin i\pi\theta,$$

et en déterminant le coefficient inconnu A au moyen d'une intégration, de $\theta = 0$ à $\theta = 2$, des deux membres multipliés par $d\theta \sin i'\pi\theta$; car le $\sum$ du second membre se réduit à un seul terme puisque

$$\int_0^2 d\theta \sin i\pi\theta \sin i'\pi\theta = 0 \text{ lorsque } i' \text{ est un nombre entier différent}$$

de i ; il reste, en tirant A ,

$$A = \frac{\int_0^2 d\theta \sin i\pi\theta - \int_0^2 \theta d\theta \sin i\pi\theta}{\int_0^2 d\theta \sin^2 i\pi\theta} = \frac{2}{i\pi}.$$

Pour faire usage de la formule (36) ainsi prouvée, décomposons en sommes de quatre sinus les produits de trois sinus ou cosinus des expressions (33), (34) de v et j , nous avons

$$(37) \quad v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \sum_i \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 + x + kt}{a_1 + a_2} + \frac{2}{\pi} \sum_i \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 - x + kt}{a_1 + a_2} \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_i \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 + x - kt}{a_1 + a_2} + \frac{2}{\pi} \sum_i \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 - x - kt}{a_1 + a_2} \end{aligned} \right\},$$

$$(38) \quad j = -\frac{V_1 - V_2}{4k} \left(\frac{2}{\pi} \sum - \frac{2}{\pi} \sum - \frac{2}{\pi} \sum + \frac{2}{\pi} \sum \right);$$

les quatre $\sum$ étant respectivement les mêmes dans j que dans v .

Or, 1° lorsque, comme dans le triangle inférieur de gauche des diagrammes (27) et (28), kt varie de 0 à a_1 et x de 0 à $a_1 - kt$, ou que

$$x + kt = \frac{a_1}{0}, \quad x - kt = \frac{-a_1}{a_1},$$

l'on a

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1}{a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{0}{2a_1}, \quad a_1 - x - kt = \frac{0}{a_1}.$$

Comme on suppose toujours $a_1 < a_2$, les quotients de ces quatre trinômes par $a_1 + a_2$, ou les quatre fractions qui multiplient $i\pi$ sous les signes sinus des formules (37), (38) donnant v et j sont au-dessus de 0 et au-dessous de 2, en sorte que la formule de sommation (36) est applicable aux quatre séries $\sum$; et l'on a, vu que la somme de ces quatre fractions est $\frac{4a_1}{a_1 + a_2}$ et que l'excès de la somme de la première

et de la dernière sur la somme des deux autres est zéro,

$$\nu = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left(1 + 1 + 1 + 1 - \frac{4a_1}{a_1 + a_2} \right) = V_1,$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k} (1 - 1 - 1 + 1) = 0.$$

2° Lorsque, comme dans le rectangle de gauche de (27), (28),

$$x + kt = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1}, \quad x - kt = \frac{-a_1}{a_1},$$

l'on a

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{0}{2a_1}, \quad a_1 - x - kt = \frac{-2a_2}{0}.$$

Les quotients par $a_1 + a_2$ des trois premiers trinômes sont entre 0 et 2. Celui du quatrième trinôme est entre 0 et -2; le sinus de son produit par $i\pi$ est le même au signe près que si l'on changeait le signe de ce quotient, et ce changement rend le $\sum$ qui le contient sommable par la formule (36); on aura à retrancher de $1 + 1 + 1 - 1$ toujours la somme des quotients des quatre trinômes par $a_1 + a_2$ comme si l'on n'avait changé le signe d'aucun d'entre eux. Donc

$$\nu = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left(1 + 1 + 1 - 1 - \frac{4a_1}{a_1 + a_2} \right) = \frac{V_1 + V_2}{2},$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k} (1 - 1 - 1 - 1) = \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

3° Triangle supérieur de gauche; $x + kt = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1}$, $x - kt = \frac{a_1 + a_2}{a_1}$,
d'où

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{-a_2}{0},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{2a_1 + a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x - kt = \frac{-2a_2}{0}.$$

On peut appliquer la formule (36) de sommation en changeant les

signes du second et du quatrième sinus; et il y a toujours à retrancher la somme des quatre quotients comme si l'on n'avait changé aucun signe. Donc

$$\nu = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left(1 - 1 + 1 - 1 - \frac{4a_1}{a_1 + a_2} \right) = V_2,$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k} (1 + 1 - 1 - 1) = 0.$$

En général, quand aucun des quatre sinus ne sera à changer de signe on aura, comme au (1°),

$$\nu = V_1, \quad j = 0.$$

Quand un sinus sera à changer de signe on aura, comme au (2°),

$$\nu = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad j = \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

Quand deux sinus seront à changer de signe on aura, comme au (3°),

$$\nu = V_2, \quad j = 0.$$

4° Grand triangle inférieur à droite du point $kt = a_1$. On a pour $x + kt = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1}$, $x - kt = \frac{-a_1 - 2a_2}{-a_1}$, les limites suivantes des quatre trinômes

$$a_1 + x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{-2a_2}{0}, \quad a_1 - x - kt = \frac{-2a_2}{0}.$$

Deux sinus sont à changer de signe; donc

$$\nu = V_2, \quad j = 0.$$

5° Comme exemple d'un cas où il faut diminuer de $2i\pi$ l'arc d'un des quatre sinus, prenons les points de la barre et les instants figurés par les divers points de l'intérieur du triangle supérieur à droite du point $x = a_2$. On a

$$x + kt = \frac{3a_1 + 2a_2}{a_1 + 2a_2}, \quad x - kt = \frac{-a_1}{a_1};$$

et les limites des quatre trinômes sont :

$$\begin{aligned} a_1 + x + kt &= \frac{4a_1 + 2a_2}{2a_1 + 2a_2}, & a_1 - x + kt &= \frac{2a_1}{0}, \\ a_1 + x - kt &= \frac{0}{2a_1}, & a_1 - x - kt &= \frac{-2a_1 - 2a_2}{-2a_2}. \end{aligned}$$

En divisant par $a_1 + a_2$, on voit que la première des quatre fractions a ses limites plus grandes que 2, ce qui rendrait la formule de sommation (36) inapplicable. Mais le sinus du produit de cette fraction par $i\pi$ sera le même que si l'on retranchait 2 avant de multiplier par $i\pi$; et, après cette soustraction, on pourra sommer.

Alors la somme des quatre fractions sera

$$\frac{4a_1 - 2(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} \text{ au lieu de } \frac{4a_1}{a_1 + a_2}.$$

Donc comme le signe du quatrième sinus doit être changé, on aura

$$\begin{aligned} v &= \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left(1 + 1 + 1 - 1 - \frac{4a_1 - 2a_1 - 2a_2}{a_1 + a_2} \right) = V_1; \\ j &= - \frac{V_1 - V_2}{4k} \left(1 - 1 - 1 - 1 + \frac{2a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

6° Afin de confirmer le résultat négatif $-\frac{V_1 - V_2}{2k}$ que Poisson n'a pas aperçu et qu'on trouve pour la compression j après l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$ de part et d'autre du point de jonction $x = a_1$ des deux barres, faisons

$$kt = 2a_2 \text{ et successivement } x = a_1 - \varepsilon \text{ et } x = a_1 + \varepsilon, \\ \varepsilon \text{ étant une longueur infiniment petite.}$$

Les quatre trinômes numérateurs entre accolades de la formule (37) sont

$$2a_1 + 2a_2 \mp \varepsilon, \quad 2a_2 \pm \varepsilon, \quad 2a_1 - 2a_2 \mp \varepsilon, \quad -2a_2 \pm \varepsilon.$$

Avec les signes supérieurs, leurs quotients par le dénominateur $a_1 + a_2$ sont respectivement compris entre 0 et 2, 0 et 2, 0 et -2, 0 et -2;

deux sinus sont à changer de signe comme aux 3°, 4°, 6°, d'où il suit que dans la première barre, immédiatement en deçà du point de jonction, ou

$$\text{pour } kt = 2a_2, \quad x = a_1 - \varepsilon, \quad \text{on a } v = V_2, \quad j = 0.$$

Avec les signes inférieurs, les quotients fournis par les trois derniers trinômes restent entre les mêmes limites, mais celui du premier trinôme est > 2 ; en en retranchant 2 (comme au 7°), on a

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{4} \left(1 + 1 - 1 - 1 - \frac{2a_1 - 2a_2}{a_1 + a_2} \right) = \frac{V_1 + V_2}{2},$$

$$j = -\frac{V_1 - V_2}{4k} \left(1 - 1 + 1 - 1 + \frac{2a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \right) = -\frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

7° Comme preuve que le même résultat s'étend à tous les points de la barre et à tous les instants figurés par les divers points de l'intérieur du rectangle de droite, faisons

$$x + kt = \frac{3a_1 + 2a_2}{a_1 + 2a_2}, \quad x - kt = \frac{-a_1 - 2a_2}{-a_1},$$

ce qui donne

$$a_1 + x + kt = \frac{4a_1 + 2a_2}{2a_1 + 2a_2}, \quad a_1 - x + kt = \frac{2a_1 + 2a_2}{2a_1},$$

$$a_1 + x - kt = \frac{-2a_2}{0}, \quad a_1 - x - kt = \frac{-2a_1 - 2a_2}{-2a_2}.$$

Les quotients de ces limites par $a_1 + a_2$ sont respectivement entre 2 et 4, 0 et 2, 0 et -2, 0 et -2. On aura donc, comme au deuxième cas du 6°,

$$v = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad j = -\frac{V_1 - V_2}{2k},$$

conformément à ce qui est écrit dans l'intérieur du rectangle considéré.

8° On vérifierait de même ce qui est relatif aux deux triangles de droite. Mais, plus généralement, pour $t = 2i' \frac{a_1 + a_2}{k}$, i' étant un nombre entier quelconque, la formule (34) donne $j = 0$ et la formule (37)

se réduit à

$$v = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \left(\frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 + x}{a_1 + a_2} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{i} \sin i\pi \frac{a_1 - x}{a_1 + a_2} \right),$$

dont la parenthèse,

$$\text{pour } x = \frac{a_1}{0} \quad \text{devient} \quad 1 + 1 - \frac{2a_1}{a_1 + a_2}, \quad \text{d'où} \quad v = V_1,$$

$$\text{pour } x = \frac{a_1 + a_2}{a_1} \quad \text{devient} \quad 1 - 1 - \frac{2a_1}{a_1 + a_2}, \quad \text{d'où} \quad v = V_2,$$

en sorte que la barre revient périodiquement à son état initial.

La solution en série transcendante de Poisson donne, comme cela devait être, tous les résultats analytiques annoncés en 1827 par Cauchy, et, de même, tous ceux que nous avons tirés d'une solution en termes finis et qui sont résumés aux diagrammes du n° 4.

6. *Séparation des deux barres de même section et de même matière qui se sont heurtées.* — A l'instant

$$t = \frac{2a_1}{k}$$

où l'ébranlement, après s'être réfléchi ou avoir fait *écho* (comme dit Poisson) en O ou à l'extrémité libre de la barre la plus courte, est revenu pour la première fois au point $x = a_1$ du choc, on a, d'après les diagrammes (27) et (28) du n° 4,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans toute la première barre } a_1 \dots \dots \dots v = V_2, \quad j = 0. \\ \text{Dans la deuxième } a_2 \text{ sur une longueur } 2a_1 \text{ ou} \\ 2a_2 - 2a_1 \text{ à partir du point de jonction } \dots \dots v = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad j = \frac{V_1 - V_2}{2k}. \end{array} \right.$$

Quand les deux barres sont égales en longueur, comme le sommet commun des deux rectangles se confond avec A''_1, A'''_1 , on voit que la première barre a tout entière la vitesse V_2 , et la seconde barre la vitesse V_1 qu'on a dû supposer moindre pour qu'il y eût rencontre. Les deux illustres géomètres cités reconnaissent qu'alors *le choc est*

terminé; les deux barres, qui ont échaugé leurs vitesses primitives, se séparent *en ne conservant aucune compression*, et il n'y a pas de perte de force vive translatoire.

Si elles ont des longueurs inégales, comme la vitesse V_2 de la première barre est moindre, au contact, que celle $\frac{V_1 + V_2}{2}$ de la deuxième, Cauchy conclut encore qu'elles se séparent et que le choc est terminé, toujours quand $t = \frac{2a_1}{k}$, a_1 étant, avons-nous dit, la plus courte des deux.

Comme on a, au même instant, $j = 0$ ou nulle compression dans la première barre a_1 , « elle ne change plus de forme, » dit Cauchy, tandis que la seconde a_2 , « composée de deux parties dont les vitesses sont différentes et dont une seule offre des compressions nulles, continuera de vibrer dans l'espace, » et, par suite, aura une portion de force vive qui se trouve perdue pour la translation ultérieure.

Mais Poisson n'admet pas alors la séparation des barres, car il exige, pour qu'elle se fasse, « le concours de deux circonstances [*], » savoir : qu'au point de contact, non-seulement la vitesse de celle a_2 qui va devant soit la plus grande, ce qui a bien lieu ici, mais encore *que les compressions soient nulles dans toutes deux*, condition qui n'est remplie qu'à l'égard de la première a_1 , puisqu'on a dans la seconde

$$j = \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

Et comme les formules trigonométriques (33), (34) de Poisson montrent que les deux circonstances exigées par lui ne se présentent ensemble à aucun instant jusqu'à l'époque

$$t = 2 \frac{a_1 + a_2}{k},$$

où les deux barres inégales reviennent [diagrammes (23), (27) et (28), et fin du n° 5] à l'état où elles étaient à l'instant $t = 0$ de leur choc, il conclut que pour peu que leurs longueurs aient d'inégalité,

[*] *Mécanique*, 1833, n° 500, p. 234.

leur choc *recommencera* périodiquement, et elles ne pourront pas se séparer [*]; d'où il suivrait que la perte de force vive translatrice, excepté dans le cas physiquement impossible d'une parfaite égalité de longueur, *serait constamment la même que dans le choc de deux corps dépourvus de toute élasticité.*

Cette conclusion singulière n'eût certainement pas été tirée par l'illustre savant s'il avait aperçu une particularité que mettent en lumière les deux diagrammes (27), (28) reproduits ci-dessous (page suivante), à savoir : que passé l'instant

$$t = \frac{a_1 + a_2}{k},$$

il se produit, dans la barre la plus longue a_2 , *une compression négative*

$$- \frac{V_1 - V_2}{2k},$$

c'est-à-dire une dilatation, et que cette dilatation, qui en affecte une longueur croissante, atteint son extrémité A_1'' en contact avec la barre a_1 , à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k}.$$

Une dilatation a pour effet, non plus une pression, mais une traction ; or, deux corps solides distincts et sans adhérence peuvent bien se presser, mais ne se *tirent* jamais l'un l'autre ; une traction ne saurait exister à leurs extrémités en contact, pas plus qu'à leurs autres extrémités. La double condition exigée par Poisson, de nullité de pression au point de contact dans les deux barres, et de supériorité de la vitesse de la deuxième barre sur celle de la première au même point, *se trouve donc remplie*, sans qu'il l'ait aperçu, à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k},$$

et elles se sépareront infailliblement.

[*] *Mécanique*, 1833, n° 504, p. 341.

depuis l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$, de marcher contiguës et juxtaposées, en vertu d'une vitesse commune V_2 (*voir* les diagrammes), quoique sans action mutuelle et déjà tout à fait indépendantes l'une de l'autre. Mais, à l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$, où l'ébranlement a parcouru aller et retour *la plus longue des deux*, leur séparation devient complète.

Reste à savoir, afin d'élucider pleinement cette matière délicate et controversée, si leur séparation sera définitive, ou bien si la marche vibratoire ultérieure de leurs parties ne les portera pas à occuper partiellement plus tard les mêmes points de l'espace, et par conséquent à se rejoindre de manière à produire, avec d'autres vitesses, un nouveau choc.

Pour nous en assurer, nous n'avons qu'à chercher, par les formules du n° 3, ou de son diagramme (23), relatif à une barre *unique* dont deux parties ont eu à un instant donné des vitesses et des compressions ou dilatations uniformes aussi données, ce que les deux barres a_1, a_2 deviennent *isolément* après l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$.

Nous arriverons au même but et nous tirerons d'un seul coup des conclusions plus étendues en appliquant cette méthode à l'état où les barres se trouvent à l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$, à partir duquel nous avons vu qu'elles cessaient d'avoir une action quelconque l'une sur l'autre.

Cette application n'a pas besoin d'être faite pour la première barre a_1 , qui continuera de se mouvoir sans compression avec la vitesse

$$V_2$$

affectant uniformément toutes ses tranches.

Mais la deuxième barre a_2 se compose, à cet instant $t = \frac{2a_1}{k}$ [*voir* les deux diagrammes (27), (28) reproduits] :

1° Si $2a_1 < a_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D'une partie de longueur } 2a_1 \text{ ayant une vitesse } \frac{V_1 + V_2}{2} \text{ et une compression } \frac{V_1 - V_2}{2k}; \\ \text{D'une partie de longueur } a_2 - 2a_1 \text{ ayant une vitesse } V_2 \text{ et une compression } 0. \end{array} \right.$$

2° Si $a_1 < a_2 < 2a_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D'une partie de longueur } 2a_2 - 2a_1 \text{ ayant une vitesse } \frac{V_1 + V_2}{2} \text{ et une compression } \frac{V_1 - V_2}{2k}; \\ \text{D'une partie de longueur } 2a_1 - a_2 \text{ ayant une vitesse } V_1 \text{ et une compression } 0. \end{array} \right.$$

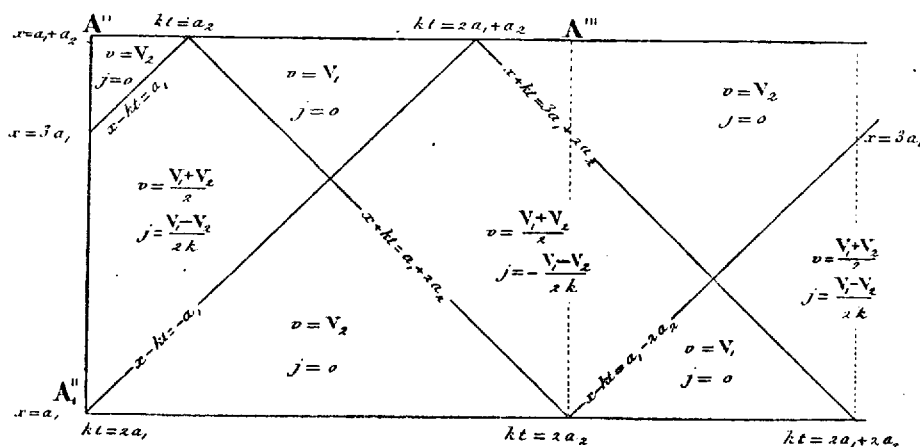
Remplaçons donc successivement, dans le diagramme (23) du n° 3 relatif à une seule barre,

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} \text{1° par } a_1, \quad a_2, \quad V_1, \quad V_2, \quad J_1, \quad J_2, \quad t, \quad x, \\ \text{2° par } 2a_1, \quad a_2 - 2a_1, \quad \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad V_2, \quad \frac{V_1 - V_2}{2k}, \quad 0, \quad t - \frac{2a_1}{k}, \quad x - a_1; \\ \text{3° par } 2a_2 - 2a_1, \quad 2a_1 - a_2, \quad \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad V_1, \quad \frac{V_1 - V_2}{2k}, \quad 0, \quad t - \frac{2a_1}{k}, \quad x - a_1; \end{array} \right.$$

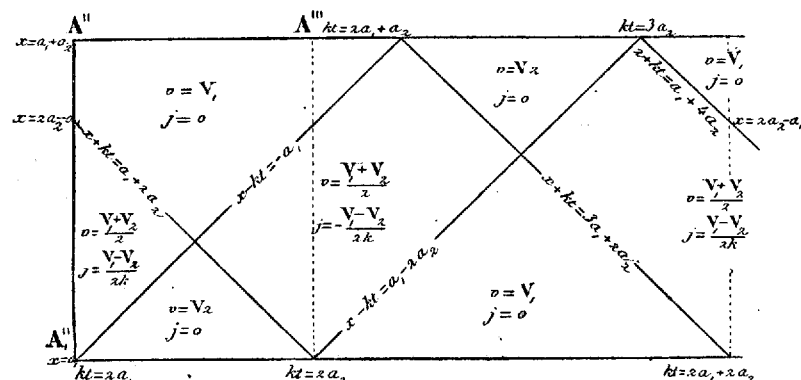
nous aurons les deux suivants, qui ont quelques lignes séparatives de moins, et par conséquent un moindre nombre de formules distinctes.

Ces deux diagrammes, comparés aux parties de ceux (27), (28) qui sont relatives à la barre a_2 , c'est-à-dire qui se trouvent, après $kt = 2a_1$, au-dessus de la ligne ponctuée $x = a_1$, leur sont semblables (sauf la réflexion en A_1'''), quant aux lignes des ébranlements. Cela devait être, vu que ceux qui affectent les barres, au moment où elles se quittent, continuent leur marche; en sorte qu'on aurait pu se dispenser de calculer par les substitutions (39) relatives à a_1, a_2, t et x , les abscisses des points où ces lignes rencontrent les horizontales $x = a_1, x = a_1 + a_2$.

(40) Ce que devient la barre a_2 : 1° quand $2a_1 < a_2$.



(41) Ce que devient la barre a_2 : 2° quand $a_2 < 2a_1$ mais $a_1 < a_2$.



On voit que ces diagrammes sont encore semblables aux parties supérieures de ceux (27), (28), pour les vitesses et les compressions,

de $kt = 2a_1$ à $kt = 2a_2$.

Cela montre que l'excès de vitesse de la barre a_2 au contact, pendant un instant indivisible dont l'époque est $t = \frac{2a_1}{k}$, n'a produit qu'une *séparation infiniment petite*, et que les deux barres, se mouvant comme isolées à partir de cet instant $t = \frac{2a_2}{k}$, restent juxtaposées bout à bout en vertu de la vitesse commune V_2 , quoique sans action l'une sur l'autre.

Mais, depuis l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$, la deuxième barre a_2 ne se meut plus comme unie à la première a_1 , ou comme il est marqué aux diagrammes (27), (28). Elle perd sa dilatation, ou sa compression négative $-\frac{V_1 - V_2}{2k}$, sur une longueur qui croît uniformément à partir de son extrémité $x = a_1$, primitivement en contact avec la première barre. Cette extrémité prend en même temps une vitesse V_1 , et, en conséquence, s'éloigne de la barre a_1 , qui en conserve une moindre V_2 .

La deuxième barre garde cette vitesse V_1 pendant un temps

$$t = \frac{2a_1}{k},$$

ou jusqu'à l'instant $kt = 2a_1 + 2a_2$, ce qui l'éloigne de la première barre d'une distance

$$\frac{2a_1}{k}(V_1 - V_2).$$

Puis, comme on voit, par la droite des deux nouveaux diagrammes (40), (41), que la deuxième barre a_2 reprend à cet instant

$$kt = 2a_1 + 2a_2$$

les mêmes vitesses et la même compression partielle qu'elle avait à l'instant $kt = 2a_1$, elle repassera par les mêmes états que ces nouveaux diagrammes indiquent, en sorte que les deux barres marcheront à la distance $2a_1 \frac{V_1 - V_2}{k}$ avec la même vitesse V_2 toutes deux, pendant le temps

$$\frac{2a_2}{k} - \frac{2a_1}{k};$$

puis elles s'éloigneront de nouveau l'une de l'autre avec une vitesse relative $V_1 - V_2$ pendant un temps

$$\frac{2a_1}{k},$$

et ainsi de suite.

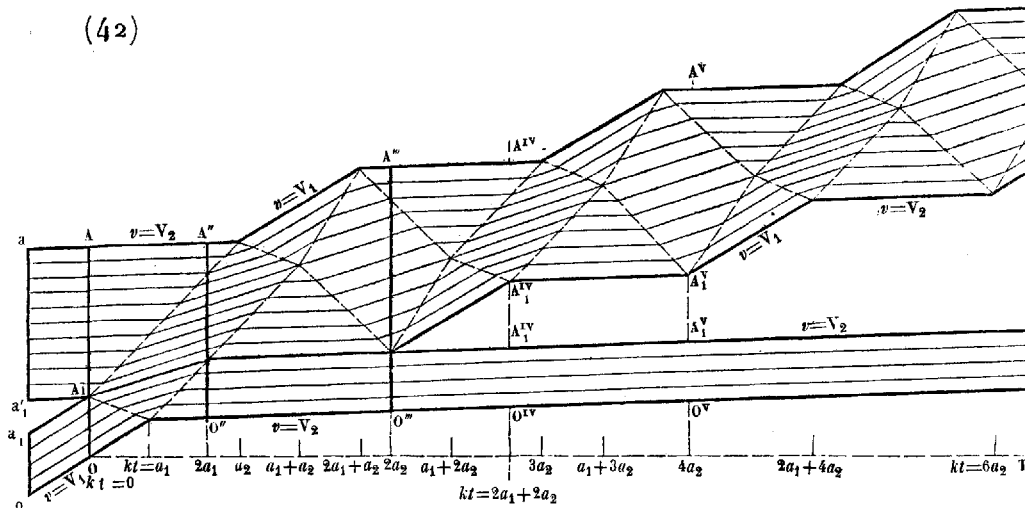
Leurs extrémités heurtées *ne se rejoindront pas*, et le choc, *terminé* de fait à l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$ fixé par Cauchy, puisqu'elles cessent alors d'agir l'une sur l'autre, *ne recommencera point*.

Nous pouvons maintenant figurer d'une manière complète les états et les mouvements des deux barres a_1, a_2 depuis un instant précédant un peu leur rencontre jusqu'à un certain temps après leur séparation, ou donner l'épure détaillée (42) des traces que laisseraient dans l'espace leurs divers points matériels si une vitesse transversale k était

composée à chaque instant avec les vitesses longitudinales réelles que ces points prennent successivement, vitesses que nous avons abstraites, ainsi que les petites contractions et dilatations, en traçant les lignes des diagrammes purement indicatifs ci-dessus.

oa_1 , a'_1a figurent, un peu avant leur choc, deux barres qui sont, pour les longueurs, dans le cas $2a_1 < a_2$ des diagrammes (27) et (40). Vu leur transport fictif transversal, OA_1 , A_1A donneront leurs situations quand elles se rencontrent, si leurs vitesses d'arrivée V_1 , V_2 sont les produits de la vitesse k du son par les tangentes des angles des droites a_1A_1 , a'_1A , avec l'axe OT des temps, ou des abscisses kt ; et

(42)



les distances des points de la figure à cette ligne OT sont celles où, à chaque instant, les divers points des deux barres se trouvent de l'emplacement primitif de l'extrémité libre O de la première si elles se sont mues dans leur direction commune sans ce transport latéral que nous supposons pour figurer sans confusion leurs états successifs.

Les lignes brisées pleines qui se suivent donnent la marche de divers points matériels; leur rapprochement ou leur écartement dans le sens vertical ou perpendiculaire à OT indique, par comparaison avec les distances où sont ces lignes sur OA_1A , les contractions positives ou négatives $\pm \frac{V_1 - V_2}{2k}$ successivement prises, perdues et reprises.

Il n'est pas besoin de dire que nous avons exagéré, pour les rendre sensibles, ces contractions et dilatations, qui sont généralement très-peu considérables ainsi que le rapport de la vitesse $V_1 - V_2$ de l'impulsion à la vitesse k de propagation du son ou des ébranlements dans la barre.

Les lignes ponctuées qui coupent les lignes pleines, et qui forment une suite de parallélogrammes et de triangles, répondant à ceux du diagramme (27) jusqu'à $O''A''$ et ensuite à ceux du diagramme (40), donnent la marche directe et réfléchie des deux *points d'ébranlement* où les vitesses et les contractions changent brusquement de grandeur.

$O''A''$ représente la situation et l'état des deux barres à l'instant $t = \frac{2a_1}{k}$ où elles cessent d'agir l'une sur l'autre et où leur choc est terminé, mais à partir duquel elles marchent contiguëment pendant le temps $\frac{2a_2 - 2a_1}{k}$ en se mouvant comme séparées.

$O''A''$ donne leur état à l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$ où elles s'éloignent l'une de l'autre, la première continuant à se mouvoir sans contraction avec la vitesse primitive V_2 de la seconde, et celle-ci ayant, sur la plus grande partie de sa longueur, une *dilatation*, ou contraction négative, avec la vitesse $\frac{V_1 + V_2}{2}$ qui devient V_1 à son extrémité inférieure aussitôt après cet instant $t = \frac{2a_2}{k}$, où elle commence à perdre graduellement sa dilatation en bas comme vers le haut.

$O^{IV}A_1^{IV}$, $A_1^{IV}A^{IV}$, $O^V A_1^V$, $A_1^V A^V$ sont les barres aux instants $t = \frac{2a_1 + 2a_2}{k}$, $t = \frac{4a_2}{k}$; leur état est le même qu'aux instants $t = \frac{2a_1}{k}$, $t = \frac{2a_2}{k}$. La période de retour, pour la deuxième barre séparée, est $\frac{2a_2}{k}$, et l'on voit qu'en vibrant dans l'espace d'une manière particulière elle s'éloignera de la première de plus en plus.

7. Conséquences. — *Force vive translatrice perdue dans le choc des deux barres élastiques de même grosseur et de même matière.* —

Vitesses de translation après le choc. — A l'instant

$$t = 2 \frac{a_1}{k}$$

où le choc est, disons-nous, terminé, et où la première barre a uniformément la vitesse

$$V_2,$$

les deux parties de la seconde barre a_2 ont

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } 2a_1 < a_2, \text{ des longueurs } 2a_1 \text{ et } a_2 - 2a_1 \text{ avec des vitesses } \frac{V_1 + V_2}{2} \text{ et } V_2. \\ \text{si } a_2 < 2a_1, \text{ des longueurs } 2a_2 - 2a_1 \text{ et } 2a_1 - a_2 \text{ avec des vitesses } \frac{V_1 + V_2}{2} \text{ et } V_1. \end{array} \right.$$

Il en résulte dans les deux cas, pour le *centre de gravité* de cette seconde barre, la même vitesse

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2a_1 \frac{V_1 + V_2}{2} + (a_2 - 2a_1) V_2}{a_2} = \frac{(2a_2 - 2a_1) \frac{V_1 + V_2}{2} + (2a_1 - a_2) V_1}{a_2} \\ = V_2 + \frac{a_1}{a_2} (V_1 - V_2); \end{array} \right.$$

ce qui était nécessaire, en effet, pour la conservation de la somme des quantités de mouvement.

La somme des *puissances vives* (demi-forces vives) [*] dues aux vitesses des centres de gravité après le choc, vu que

m

désigne la masse de l'unité de longueur, a ainsi pour grandeur

$$(45) \left\{ \begin{array}{l} \frac{ma_1}{2} V_2^2 + \frac{ma_2}{2} \left[V_2 + \frac{a_1}{a_2} (V_1 - V_2) \right]^2 \\ = \frac{m}{2} \left[a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2 - a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) (V_1 - V_2)^2 \right]. \end{array} \right.$$

[*] Ou si l'on veut, comme les appelle M. Thomson, des *énergies cinétiques*, ou provenant du mouvement *actuel*.

Comme la somme des puissances vives imprimées était

$$(46) \quad \frac{m}{2} (a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2),$$

la *perte* de puissance vive translatrice est

$$(47) \quad \frac{m a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) (V_1 - V_2)^2.$$

La *proportion* de cette perte, quotient de (47) par (46), est

$$(48) \quad \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \frac{\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2}{1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}.$$

Si l'on en différentie l'expression par rapport à $\frac{V_2}{V_1}$, on trouve, en égalant à zéro, que le maximum de cette proportion de perte a lieu pour

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad \text{ou} \quad a_1 V_1 + a_2 V_2 = 0,$$

c'est-à-dire pour le cas, envisagé par Cauchy afin de fixer les idées, où les vitesses du choc sont de sens opposés et réciproques aux longueurs des deux barres, en sorte que le centre de gravité général du système soit immobile.

Et cette proportion maximum de la perte a pour grandeur

$$(49) \quad 1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Elle est bien des $\frac{3}{4}$ comme il le dit, lorsque $a_2 = 2a_1$ (n° 1).

Mais on ne voit nullement que cette même perte proportionnelle soit réduite à $\frac{1}{2}$, comme a avancé le même Savant, lorsque la barre a_2 est infiniment plus longue que la barre a_1 . On voit au contraire qu'elle est alors égale à

$$1,$$

ou que la perte est de la *totalité* de la puissance vive primitive; ce qui s'explique en considérant qu'alors les deux vitesses des centres de gravité respectifs des barres sont infiniment petites du premier ordre après le choc, d'où il suit que leurs carrés sont infiniment petits du second ordre, et qu'en ajoutant les demi-produits de ces carrés par les deux masses, dont l'une est infinie, l'on a pour la somme des puissances vives un infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire zéro, quelque considérable qu'ait été la vitesse primitive V , de la barre de longueur finie a_1 . On peut considérer aussi que la séparation définitive des barres, qui n'a lieu, avons-nous vu, qu'à l'instant $t = \frac{2a_2}{k}$, n'arrivera jamais si la longueur a_2 est infinie.

Si l'on calcule la puissance vive totale due, non plus à des composantes de vitesse prises égales à celles des centres de gravité de chacune des deux parties a_1 , a_2 , mais aux vitesses réelles ou effectives des diverses tranches immédiatement après le choc, l'on a

$$\text{Quand } 2a_1 < a_2, \quad \frac{m}{2} \left[a_1 V_2^2 + 2a_1 \left(\frac{V_1 + V_2}{2} \right)^2 + (a_2 - 2a_1) V_2^2 \right],$$

$$\text{Quand } a_1 < a_2 < 2a_1, \quad \frac{m}{2} \left[a_1 V_2^2 + (2a_2 - 2a_1) \left(\frac{V_1 + V_2}{2} \right)^2 + (2a_1 - a_2) V_1^2 \right];$$

en sorte que la puissance vive réelle, qui était primitivement

$$\frac{m}{2} (a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2),$$

se trouverait diminuée par le choc

$$(50) \quad \begin{cases} \text{Dans le cas } 2a_1 < a_2, & \text{de } \frac{m}{2} a_1 \frac{(V_1 - V_2)^2}{2}, \\ \text{Dans le cas } a_2 < 2a_1, & \text{de } \frac{m}{2} (a_2 - a_1) \frac{(V_1 - V_2)^2}{2}. \end{cases}$$

Le rapport de cette diminution à la puissance vive primitive est

$$(51) \quad \begin{cases} \text{si } 2a_1 < a_2, & \text{de } \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2}{1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)}; \\ \text{si } a_2 < 2a_1, & \text{de } \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \frac{\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2}{1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}. \end{cases}$$

Il a, comme le rapport (48), son maximum pour

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{a_1}{a_2}, \quad \text{ou} \quad a_1 V_1 + a_2 V_2 = 0;$$

et la grandeur de ce maximum est représentée par les deux expressions

$$(52) \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) \quad \text{si } 2a_1 < a_2; \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{2a_1} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \quad \text{si } a_2 < 2a_1.$$

La première a pour valeur $\frac{1}{2}$ lorsque a_2 est infiniment plus grand que a_1 , et elles ont l'une et l'autre, quand $a_2 = 2a_1$, la valeur $\frac{3}{4}$; ce qui est fortuitement la même chose que ce que donne, dans la même supposition, la formule (49) exprimant la perte proportionnelle autrement entendue.

Ces résultats montrent que Cauchy évaluait la perte par la *diminution*, dont nous venons de donner la formule, de la puissance vive *effective*, ou due aux vitesses individuelles réelles des tranches au moment où le choc est achevé.

Mais, ainsi envisagée, observons que la perte serait même *toujours nulle*; car la diminution en question se retrouve tout entière dans le *potentiel de compression*, c'est-à-dire dans le travail qui a comprimé dans une proportion

$$(53) \quad j = \frac{V_1 - V_2}{2k}.$$

une portion de la seconde barre; travail qu'elle peut restituer et qu'elle restituera effectivement en puissance vive vibratoire.

En effet, si

E et ω

représentent le module d'élasticité de compression et l'aire de la section de la barre, une compression j exige, pour être maintenue, un effort statique d'une intensité

$$E\omega j;$$

et le travail nécessaire pour la produire sur une longueur quelconque l de la barre est mesuré par l'accourcissement total $j l$ multiplié par $\frac{E\omega j}{2}$, moyenne des intensités des forces qui ont comprimé, depuis l'intensité initiale zéro jusqu'à l'intensité finale $E\omega j$. Or, $\rho = \frac{m}{\omega}$ étant la densité de la barre, l'on a, comme on sait (voyez n° 16),

$$(54) \quad k^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{E\omega}{m}.$$

Le travail ou potentiel de compression est donc, d'après la valeur (53) $\frac{V_1 - V_2}{2k}$ de j ,

$$j l \cdot \frac{E\omega j}{2} = l \cdot \frac{m k^2}{2} j^2 = \frac{m}{2} l \cdot \frac{(V_1 - V_2)^2}{4}.$$

Mettant pour l la longueur comprimée qui est (form. 43) $2a_1$ dans le cas $2a_1 < a_2$, et $2a_2 - 2a_1$ dans le cas $a_2 < 2a_1$, l'on a, pour ce potentiel, précisément les grandeurs (51) des diminutions de puissance vive effective; en sorte que le théorème général de conservation de la puissance vive jointe au potentiel se trouve satisfait, comme on pouvait le prévoir.

Il n'y a ainsi, et cela devait être, aucune perte quand on estime, après le choc des barres élastiques, la puissance vive effective en y joignant comme on le doit celle qui est en réserve sous forme de potentiel ou de travail de compression effectuée [*]. Mais une partie de

[*] Ou en joignant, à l'énergie cinétique ou actuelle (sir W. Thomson), l'énergie potentielle.

cette puissance vive tant actuelle que virtuelle est ou sera vibratoire, et se trouve en conséquence destinée à se dissiper dans l'air ou dans les autres corps environnants; on doit la regarder comme *perdue* pour le mouvement de translation, puisqu'elle n'y servira qu'éventuellement et dans un avenir indéterminé après être devenue atomique ou calorifique et avoir été utilisée, comme telle, dans quelque machine à feu pour opérer une translation, mais *d'autres corps* que ceux où présentement elle réside.

La force vive translatrice résiduelle et la proportion de sa perte doivent donc être estimées, selon l'idée de Coriolis et comme nous avons fait, par les expressions (45), (48) et (49), établies en attribuant à toutes les molécules des corps qui se sont heurtés, les vitesses V_2 et (44) de leurs deux centres de gravité; vitesses qui sont, au reste, encore les mêmes à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k}$$

de la séparation définitive ou de l'éloignement l'une de l'autre des deux extrémités juxtaposées, comme on peut le voir par la symétrie de chacun des deux diagrammes (39), (40) et l'égalité des longueurs de la deuxième barre, animées respectivement des vitesses $\frac{V_1 + V_2}{2}$ et V_2 ou V_1 à cet instant et à celui $t = \frac{2a_1}{k}$. On trouve même, entre ces deux instants-là, une vitesse constante pour le centre de gravité de a_2 , puisque les deux barres, pendant tout le temps $\frac{2a_2}{k} - \frac{2a_1}{k}$, se meuvent comme isolées ou sans action l'une sur l'autre.

Mais on se fera mieux que par les expressions (47), (48), (49) l'idée des grandeurs diverses de cette perte occasionnée par le choc des deux barres élastiques, en la comparant à la perte qui aurait lieu si ces barres étaient des corps dénués d'élasticité. Cette dernière perte est

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} (a_1 V_1^2 + a_2 V_2^2) - \frac{m}{2} (a_1 + a_2) \left(\frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} a_1 \left(V_1 - \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} \right)^2 + \frac{m}{2} a_2 \left(\frac{a_1 V_1 + a_2 V_2}{a_1 + a_2} - V_2 \right)^2, \end{aligned}$$

ou

$$(55) \quad \frac{m a_1 m a_2 (V_1 - V_2)^2}{m a_1 + m a_2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Le quotient de l'expression (47) $\frac{m a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) (V_1 - V_2)^2$ par celle-ci est

$$(56) \quad 1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$$

ou précisément égal à la proportion maximum (49) de la perte. Ses valeurs sont :

$$\begin{aligned} \text{Pour } \frac{a_2}{a_1} = 1, & \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \dots, \infty. \\ 1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = 0, & \quad \frac{9}{25}, \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{15}{16}, \quad \frac{24}{25}, \dots, 1. \end{aligned}$$

Telles sont les grandeurs du rapport de la perte de force vive translatatoire dans le choc de deux barres parfaitement élastiques de même matière et de même section, ayant des longueurs a_1, a_2 , à celle qui aurait lieu, et qui est connue de tout le monde, si ces barres étaient deux corps dénués d'élasticité ou restant indéfiniment unis après leur rencontre.

Et si l'on appelle, pour la première et pour la seconde barre,

$$(57) \quad \begin{cases} U_1, U_2 \text{ les vitesses de translation après le choc,} \\ M_1 = m a_1, \quad M_2 = m a_2 \text{ les masses,} \end{cases}$$

on doit prendre, la première ayant alors partout (n° 6) la vitesse primitive V_2 de la seconde, et celle du centre de gravité de la seconde, donnée par l'expression (44), pouvant être tirée également de la condition $M_1 U_1 + M_2 V_2 = M_1 V_1 + M_2 V_2$ de conservation de la quantité de mouvement,

$$(58) \quad \begin{cases} U_1 = V_2, \\ U_2 = V_2 + \frac{a_1}{a_2} (V_1 - V_2) = V_2 + \frac{M_1}{M_2} (V_1 - V_2), \end{cases}$$

au lieu de $U_1 = V_1 - \frac{2M_2}{M_1+M_2}(V_1 - V_2)$, $U_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1+M_2}(V_1 - V_2)$ qu'on trouve dans tous les ouvrages qui traitent du choc des corps parfaitement élastiques.

Si $V_2 = 0$, ou si la barre la plus longue était immobile avant le choc, on a après le choc,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{a_1}{a_2} V_1 = \frac{M_1}{M_2} V_1;$$

et si $V_1 = 0$ ou si c'était la barre la plus courte qui se trouvait en repos, il faut prendre

$$U_1 = V_2, \quad U_2 = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) V_2 = \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right) V_2.$$

Nous verrons plus loin que les expressions (58), avec $\frac{M_1}{M_2}$ dans la seconde, s'appliquent même pour deux barres de matières et de sections différentes, si les masses où l'ébranlement se propage à chaque instant sont les mêmes pour toutes deux; et nous en donnerons, à la fin du Mémoire, des démonstrations élémentaires.

DEUXIÈME PARTIE.

CHOC DE DEUX BARRES DONT LES SECTIONS ET LES MATIÈRES SONT DIFFÉRENTES.

8. *Problème du mouvement que prennent deux barres juxtaposées bout à bout lorsqu'elles sont de grosseurs et de matières différentes, en partant d'un état initial quelconque.* — Regardons-les d'abord comme formant deux parties d'une même barre, et appelons respectivement

$$(59) \quad \begin{cases} a_1, \omega_1, m_1, M_1 = m_1 a_1, E_1, u_1 \text{ pour la première,} \\ a_2, \omega_2, m_2, M_2 = m_2 a_2, E_2, u_2 \text{ pour la seconde.} \end{cases}$$

1° La longueur; 2° la section transversale; 3° la masse par unité de longueur; 4° la masse totale; 5° le module d'élasticité d'extension et de compression longitudinale; 6° le déplacement longitudinal, au

bout du temps t , d'un point à la distance x de l'extrémité libre (ou de gauche) de la première.

Et faisons

$$(60) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{du_1}{dt}, & j_1 = -\frac{du_1}{dx}, & k_1^2 = \frac{E_1 \omega_1}{m_1}, & \tau_1 = \frac{a_1}{k_1}, \\ v_2 = \frac{du_2}{dt}, & j_2 = -\frac{du_2}{dx}, & k_2^2 = \frac{E_2 \omega_2}{m_2}, & \tau_2 = \frac{a_2}{k_2}; \end{cases}$$

ou désignons par les lettres v, j, k, τ , 1° la vitesse et 2° la compression au même point et au même instant; 3° la *célérité* de la propagation longitudinale du son ou des ébranlements, et 4° le temps nécessaire pour qu'il parcoure la longueur de chaque partie.

Faisons enfin, pour abréger,

$$(61) \quad r = \frac{\frac{E_2 \omega_2}{k_2}}{\frac{E_1 \omega_1}{k_1}} = \frac{m_1 k_1}{m_2 k_2},$$

c'est-à-dire appelons r le *rapport des masses de portions des deux barres qui s'ébranlent simultanément ou que le son parcourt dans le même temps*.

Et choisissons constamment pour la première des deux barres, appelée a_1 , à l'extrémité libre de laquelle nous plaçons l'origine des x , celle qui est parcourue d'un bout à l'autre par l'ébranlement ou le son dans le moins de temps; en sorte que nous supposons toujours

$$(62) \quad \tau_1 < \tau_2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}.$$

Les équations à résoudre sont, les lettres φ et ψ désignant des fonctions de x qui représentent l'état des barres à l'instant $t = 0$,

$$(63) \quad \frac{d^2 u_1}{dt^2} = k_1^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2}, \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} = k_2^2 \frac{d^2 u_2}{dx^2},$$

$$(64) \quad \left(\frac{du_1}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{dx} \right)_{x=a_1+a_2} = 0,$$

$$(65) \quad (u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}, \quad \left(\frac{du_1}{dx} \right)_{x=a_1} = \frac{E_2 \omega_2}{E_1 \omega_1} \left(\frac{du_2}{dx} \right)_{x=a_1} = r \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{du_2}{dx} \right)_{x=a_1},$$

enfin

$$(66) \quad (u_1)_{t=0} = \varphi_1 x, \quad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = \psi_1 x, \quad (u_2)_{t=0} = \varphi_2 x, \quad \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = \psi_2 x;$$

conditions initiales qui, dans le cas du choc des deux barres avec les vitesses positives ou négatives V_1, V_2 , telles [comme au n° 4 (25)] que

$$(67) \quad V_1 - V_2 > 0$$

se réduisent à

$$(68) \quad (u_1)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = V_1, \quad (u_2)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = V_2.$$

J'ai donné, dans un autre Mémoire, pour les déplacements tels que u_1, u_2 , des expressions en série transcendante, applicables à un nombre quelconque de barres ou parties de barre en partant d'un état quelconque, les extrémités non jointes de la première et de la dernière étant ou libres ou assujetties, et toutes ou quelques-unes pouvant être en tronc de cône ou de pyramide. Les formules spéciales à deux barres prismatiques animées initialement de vitesses uniformes V_1, V_2 , sans compression, sont

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum AX_1 \sin mt, \quad \text{si } X_1 = \frac{\cos \frac{m\tau_1 x}{a_1}}{\cos m\tau_1}, \\ u_2 = \sum AX_2 \sin mt, \quad \text{si } X_2 = \frac{\cos \frac{m\tau_2}{a_2} (a_1 + a_2 - x)}{\cos m\tau_2}, \\ \text{et si } A = \frac{1}{m} \frac{\frac{M_1}{a_1} V_1 \int_0^{a_1} X_1 dx + \frac{M_2}{a_2} V_2 \int_{a_1}^{a_1+a_2} X_2 dx}{\frac{M_1}{a_1} \int_0^{a_1} X_1^2 dx + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1}^{a_1+a_2} X_2^2 dx}, \\ \sum \text{ s'étendant à toutes les racines } m \text{ réelles et positives, en nombre} \\ \text{infini, de l'équation transcendante} \\ E_1 \omega_1 \left(\frac{dX_1}{dx} \right)_{x=a_1} = E_2 \omega_2 \left(\frac{dX_2}{dx} \right)_{x=a_1}, \\ \text{ou} \quad m \left(\frac{M_1}{\tau_1} \tan m\tau_1 + \frac{M_2}{\tau_2} \tan m\tau_2 \right) = 0, \\ \text{y compris la racine } m = 0; \end{array} \right.$$

ou bien, si l'on exclut cette racine $m = 0$, en faisant passer hors du signe $\sum$ ce qui en provient, et si l'on développe :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2} t + (V_1 - V_2) \frac{M_1}{\tau_1} \sum \frac{2}{m^2} \frac{\sin m \tau_1 \cos \frac{m x}{k_1} \sin m t}{M_1 + M_2 \frac{\cos^2 m \tau_1}{\cos^2 m \tau_2}}, \\ u_2 &= \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2} t - (V_1 - V_2) \frac{M_2}{\tau_2} \sum \frac{2}{m^2} \frac{\sin m \tau_2 \cos \frac{m(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \sin m t}{M_1 \frac{\cos^2 m \tau_2}{\cos^2 m \tau_1} + M_2}, \end{aligned} \right.$$

En effet, les expressions (69) de u_1 , u_2 satisfont bien, vu $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$, $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$, aux équations différentielles (63), et, aussi, évidemment à (64), (65), ainsi qu'à la première et à la troisième des conditions initiales (68); et, quant à la seconde et à la quatrième de celles-ci, comme elles reviennent à $\sum m A X_1 = V_1$, $\sum m A X_2 = V_2$, si l'on ajoute ces deux équations multipliées respectivement par $\frac{M_1}{a_1} X_1 dx$, $\frac{M_2}{a_2} X_2 dx$, et intégrées, aussi respectivement, de 0 à a_1 , et de a_1 à $a_1 + a_2$, tous les termes des $\sum$ disparaissent hors un seul et l'on tire bien la valeur (69) de A, vu que si m, m' sont deux racines différentes de l'équation transcendante, et si X_1, X_2 et X'_1, X'_2 sont les valeurs correspondantes respectives des fonctions de x et m appelées X_1, X_2 , il est facile de voir que d'après cette même équation on a

$$(71) \quad \frac{M_1}{a_1} \int_a^{a_1} X_1 X'_1 dx + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1}^{a_1 + a_2} X_2 X'_2 dx = 0.$$

Si les deux barres qui se heurtent sont en forme de tronc de cône ou de pyramide, il est bon, pour avoir des expressions symétriques, de compter les abscisses x_1, x_2 de leurs sections variables Ω_1, Ω_2 dans deux sens opposés à partir de leurs extrémités libres respectives, en sorte qu'on aura pour les superficies de ces sections

$$\Omega_1 = \omega_1 \left(1 + \frac{x_1}{h_1} \right), \quad \Omega_2 = \omega_2 \left(1 + \frac{x_2}{h_2} \right)^2,$$

ω_1, ω_2 étant celles des sections extrêmes, et h_1, h_2 des constantes linéaires positives ou négatives. Alors, si $\frac{\Pi_1}{g}, \frac{\Pi_2}{g}$ représentent les densités des deux barres, et si l'on fait

$$\frac{g E_1}{\Pi_1} = k_1^2, \quad \frac{g E_2}{\Pi_2} = k_2^2,$$

comme les équations différentielles (63) sont alors remplacées par

$$\frac{d \left(E_1 \Omega_1 \frac{du_1}{dx_1} \right)}{dx_1} = \frac{\Pi_1 \Omega_1}{g} \frac{d^2 u_1}{dt^2}, \quad \frac{d \left(E_2 \Omega_2 \frac{du_2}{dx_2} \right)}{dx_2} \frac{\Pi_2 \Omega_2}{g} = \frac{d^2 u_2}{dt^2},$$

et les équations définies (64), (65), (68), par

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_1}{dx_1} \right)_{x_1=0} &= 0, \quad \left(\frac{du_2}{dx_2} \right)_{x_2=0} = 0, \quad (u_1)_{x_1=a_1} = - (u_2)_{x_2=a_2}, \\ E_1 \omega_1 \left(1 + \frac{a_1}{h_1} \right)^2 \left(\frac{du_1}{dx_1} \right)_{x_1=a_1} &= E_2 \omega_2 \left(1 + \frac{a_2}{h_2} \right)^2 \left(\frac{du_2}{dx_2} \right)_{x_2=a_2}, \\ (u_1)_{t=0} &= 0, \quad \left(\frac{du_1}{dt} \right)_{t=0} = V_1, \quad (u_2)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{du_2}{dt} \right)_{t=0} = -V_2, \end{aligned}$$

l'on aura pour solution

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum A X_1 \sin mt, \quad u_2 = \sum A X_2 \sin mt, \\ \text{si } X_1 &= \frac{1 + \frac{a_1}{h_1} \cos \frac{mx_1}{k_1} + \frac{k_1}{mh_1} \sin \frac{mx_1}{k_1}}{1 + \frac{x_1}{a_1} \cos \frac{ma_1}{k_1} + \frac{k_1}{mh_1} \sin \frac{ma_1}{k_1}}, \quad X_2 = \frac{1 + \frac{a_2}{h_2} \cos \frac{mx_2}{k_2} + \frac{k_2}{mh_2} \sin \frac{mx_2}{k_2}}{1 + \frac{x_2}{h_2} \cos \frac{ma_2}{k_2} + \frac{k_2}{mh_2} \sin \frac{ma_2}{k_2}}, \\ A &= \frac{1}{m} \frac{\Pi_1 \omega_1 V_1 \int_0^{a_1} \left(1 + \frac{x_1}{h_1} \right)^2 X_1 dx_1 + \Pi_2 \omega_2 V_2 \int_0^{a_2} \left(1 + \frac{x_2}{h_2} \right)^2 X_2 dx_2}{\Pi_1 \omega_1 \int_0^{a_1} \left(1 + \frac{x_1}{h_1} \right)^2 X_1^2 dx_1 + \Pi_2 \omega_2 \int_0^{a_2} \left(1 + \frac{x_2}{h_2} \right)^2 X_2^2 dx_2}, \\ \sum &\text{ s'étendant à toutes les racines de l'équation transcendante} \\ E_1 \omega_1 \left(1 + \frac{a_1}{h_1} \right)^2 \left(\frac{dX_1}{dx_1} \right)_{x_1=a_1} &= E_2 \omega_2 \left(1 + \frac{a_2}{h_2} \right)^2 \left(\frac{dX_2}{dx_2} \right)_{x_2=a_2}; \end{aligned} \right\}$$

formules qui se réduisent à celles (69) du cas de deux barres prismatiques, si

$$h_1 = \infty, \quad h_2 = \infty,$$

et si l'on y fait $x_1 = x$, $x_2 = a_1 + a_2 - x$.

La même analyse servirait pour des barres composées de plusieurs parties en forme de tronc de pyramide ou de cône, et par conséquent pour le choc de corps en forme de fuseau ou autres, où l'on puisse supposer que le mouvement s'opère par tranches parallèles.

Au Mémoire cité, complément de ceux que j'ai présentés depuis 1857 et qui vont être imprimés au *Journal de l'École Polytechnique*, on trouvera le développement de cette solution, à laquelle il convient de recourir quelquefois même pour les barres prismatiques, comme nous verrons plus loin, notamment quand une des deux parties a une section relativement fort grande, une longueur fort petite ou une résistance élastique considérable; suppositions qui, poussées plus loin encore, permettent de réduire l'une des deux parties ou barres à une masse étrangère parfaitement dure, pouvant être venue heurter l'autre barre supposée libre aussi, ce qui constitue un problème dont la solution directe a été présentée en 1865 [*].

Mais, en excluant ces cas extrêmes, et en revenant aux barres prismatiques, nous pouvons nous servir de la solution en termes finis

$$(72) \quad u_1 = f_1(x + k_1 t) + F_1(x - k_1 t), \quad u_2 = f_2(x + k_2 t) + F_2(x - k_2 t),$$

f_1, F_1, f_2, F_2 désignant des fonctions dont la forme peut varier brusquement, et qui en vertu de (64), (65), (66) doivent satisfaire à

$$(73) \quad f'_1(k_1 t) + F'_1(-k_1 t) = 0, \quad f'_2(a_1 + a_2 + k_2 t) + F'_2(a_1 + a_2 - k_2 t) = 0$$

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(a_1 + k_1 t) + F_1(a_1 - k_1 t) = f_2(a_1 + k_2 t) + F_2(a_1 - k_2 t) \\ f'_1(a_1 + k_1 t) + F'_1(a_1 - k_1 t) = r \frac{k_2}{k_1} [f'_2(a_1 + k_2 t) + F'_2(a_1 - k_2 t)] \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{de } t=0 \\ \text{à } t=\infty, \end{array}$$

$$(75) \quad f_1 x + F_1 x = \varphi_1 x, \quad f'_1 x - F'_1 x = \frac{\psi_1 x}{k_1} \text{ de } x=0 \text{ à } x=a_1,$$

$$(76) \quad f_2 x + F_2 x = \varphi_2 x, \quad f'_2 x - F'_2 x = \frac{\psi_2 x}{k_2} \text{ de } x=a_1 \text{ à } x=a_1 + a_2.$$

[*] 3 juillet, *Comptes rendus*, t. LXI, p. 33.

Si nous voulons en déduire les déplacements u_1, u_2 eux-mêmes, nous intégrerons les deux membres, multipliés par dx , de la deuxième équation (75) et de la deuxième équation (76) en choisissant arbitrairement, par la même raison que nous avons dite au n° 2 pour la deuxième équation (6), les constantes des seconds membres; par exemple, vu que c'est ce qu'il y a de plus simple, de manière que leurs intégrales s'annulent respectivement pour $x = 0$ et pour $x = a_1 + a_2$. Puis, après avoir déduit, comme au même n° 2, des deux équations ainsi obtenues, combinées avec les premières (75), (76), et avec celles qui résultent de l'intégration des deux (73) de 0 à t , les valeurs de

$$f_1, f_2, F_1, F_2,$$

pour des valeurs de leurs variables qui sont comprises entre certaines limites, nous nous servirons des deux conditions de *jonction* ou de *raccordement* (74), qui nous fourniront, en intégrant la seconde, des formules *promotrices* analogues à celles (82) qui seront données tout à l'heure, et qui feront pousser jusqu'à des limites croissant indéfiniment dans le sens positif pour f_1 et f_2 et dans le sens négatif pour F_1 et F_2 .

Mais comme nous avons besoin surtout de connaître les vitesses et les contractions ou compressions

$$(77) \quad \begin{cases} v_1 = k_1 f'_1(x + k_1 t) - k_1 F'_1(x - k_1 t), \\ j_1 = -f'_1(x + k_1 t) - F'_1(x - k_1 t), \end{cases}$$

$$(78) \quad \begin{cases} v_2 = k_2 f'_2(x + k_2 t) - k_2 F'_2(x - k_2 t), \\ j_2 = -f'_2(x + k_2 t) - F'_2(x - k_2 t), \end{cases}$$

et par conséquent les dérivées des fonctions f, F , nous différentierons au contraire celles des équations de condition (74), (75), (76), où ces fonctions ne le sont pas encore. Nous tirerons ainsi, de (75) et de (76), ζ désignant généralement la variable des fonctions,

$$(79) \quad \begin{cases} f'_1\left(\zeta = \frac{a_1}{0}\right) = \frac{\varphi'_1 \zeta}{2} + \frac{\psi_1 \zeta}{2k_1}, & F'_1\left(\zeta = \frac{0}{a_1}\right) = \frac{\varphi'_1 \zeta}{2} - \frac{\psi_1 \zeta}{2k_1}, \\ f'_2\left(\zeta = \frac{a_1 + a_2}{a_1}\right) = \frac{\varphi'_2 \zeta}{2} + \frac{\psi_2 \zeta}{2k_2}, & F'_2\left(\zeta = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) = \frac{\varphi'_2 \zeta}{2} - \frac{\psi_2 \zeta}{2k_2}; \end{cases}$$

d'où, comme les conditions (73) fournissent

$$(80) \quad F'_1 \left(\zeta = \frac{-\infty}{0} \right) = -f'_1(-\zeta), \quad f'_2 \left(\zeta = \frac{\infty}{a_1 + a_2} \right) = -F'_2(2a_1 + 2a_2 - \zeta),$$

nous déduirons

$$(81) \quad \begin{cases} F'_1 \left(\zeta = \frac{-a_1}{0} \right) = -\frac{\varphi'_1(-\zeta)}{2} - \frac{\psi_1(-\zeta)}{2k_1}, \\ f'_2 \left(\zeta = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \right) = -\frac{\varphi'_2(2a_1 + 2a_2 - \zeta)}{2} + \frac{\psi_2(2a_1 + 2a_2 - \zeta)}{2k_2}. \end{cases}$$

Pour pousser plus loin les limites de ζ , servons-nous maintenant des équations (74) de condition de *raccordement* des deux parties du système.

Si l'on différentie la première par rapport à t , et si on les résout ensuite toutes deux par rapport à f'_1 et F'_2 regardées comme deux inconnues au premier degré, on tire

$$f'_1(a_1 + k_1 t) = \frac{r-1}{r+1} F'_1(a_1 - k_1 t) + \frac{2r}{r+1} \frac{k_2}{k_1} f'_2(a_1 + k_2 t),$$

$$F'_2(a_1 - k_2 t) = \frac{2}{r+1} \frac{k_1}{k_2} F'_1(a_1 - k_1 t) - \frac{r-1}{r+1} f'_2(a_1 + k_2 t).$$

Remplaçant par ζ les variables indéterminées des fonctions f'_1 , F'_2 , et ajoutant, en nouveaux membres, celles F'_1 et f'_2 qui, d'après les relations (80), ont les mêmes valeurs que $-f'_1$ et $-F'_2$, l'on déduit les doubles formules suivantes, que j'appelle *promotrices* parce qu'elles conduisent indéfiniment à des valeurs des quatre fonctions de plus en plus *avancées* quant aux valeurs de leurs variables,

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_1 \left(\zeta = \frac{\infty}{a_1} \right) = \\ = -F'_1 \left(\zeta = \frac{-\infty}{-a_1} \right) \\ F'_2 \left(\zeta = \frac{-\infty}{a_1} \right) = \\ = -f'_2 \left(2a_1 + 2a_2 - \zeta = \frac{\infty}{a_1 + 2a_2} \right) \end{array} \right\} \begin{cases} = \frac{r-1}{r+1} F'_1(2a_1 - \zeta) + \frac{2r}{r+1} \frac{k_2}{k_1} f'_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] \\ = \frac{2}{r+1} \frac{k_1}{k_2} F'_1 \left[a_1 - \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] - \frac{r-1}{r+1} f'_2(2a_1 - \zeta). \end{cases}$$

Ces formules générales (82) servent, lorsqu'on connaît pour certaines valeurs de leurs variables les quatre fonctions

$$f'_1(x + k_1 t), \quad F'_1(x - k_1 t), \quad f'_2(x + k_2 t), \quad F'_2(x - k_2 t),$$

à obtenir ce qu'elles deviennent quand on augmente les variables respectivement de

$$(83) \quad 2a_1, \quad -2a_1, \quad 2\frac{k_2}{k_1}a_1, \quad -2\frac{k_2}{k_1}a_1,$$

ce qui équivaut, pour un même point ou une même valeur de x , à une augmentation du temps t de

$$2\tau_1 = 2\frac{a_1}{k_1}.$$

En effet, en partant, par exemple, de ce que nous connaissons déjà par les expressions (79) et (81), les formules promotrices (82) pourront nous donner (en indiquant simplement les limites des variables sous les signes f , F sans écrire ζ),

$$f'_1\left(\frac{3a_1}{a_1}\right), \quad F'_1\left(\frac{-3a_1}{-a_1}\right), \quad F'_2\left(\frac{a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1}{a_1}\right), \quad f'_2\left(\frac{a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1}{a_1 + 2a_2}\right);$$

car, pour ces limites, on aura dans les troisièmes membres de (82),

$$F'_1\left(\frac{-a_1}{a}\right), \quad f'_2\left(\frac{a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1}{a_1}\right),$$

dont on connaît bien les valeurs par (79) et (81), puisque $a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1$ est $< a_1 + 2a_2$ d'après l'hypothèse constante (62) $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$.

Mais comme, d'après les mêmes formules (79) à (81), F'_1 a des expressions différentes entre les valeurs $\frac{0}{a_1}$ et entre les valeurs $\frac{-a_1}{0}$ de sa variable, et f'_2 a aussi une autre forme entre $\frac{a_1 + a_2}{a_1}$ qu'entre $\frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2}$, il est nécessaire de scinder en plusieurs parties les accroissements (83), $2a_1$, $-2a_1$, $2\frac{k_2}{k_1}a_1$, $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$, et cette *scission* devra être différente suivant les diverses grandeurs relatives de $\frac{a_1}{k_1}$ et de $\frac{a_2}{k_2}$.

Nous trouvons, de cette manière,

Lorsque $2 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ ou $2\tau_1 < \tau_2$ (d'où $a_1 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 < a_1 + a_2$) :

$$(84) \quad f'_1 \left\{ \begin{array}{l} 3a_1 \\ \zeta = 2a_1 \\ a_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{r-1}{2(r+1)k_1} [-k_1 \varphi'_1(\zeta - 2a_1) - \psi_1(\zeta - 2a_1)] \\ + \frac{r}{(r+1)k_1} \left\{ k_2 \varphi'_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] + \psi_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] \right\}, \\ \frac{r-1}{2(r+1)k_1} [k_1 \varphi'_1(2a_1 - \zeta) - \psi_1(2a_1 - \zeta)] \\ + \frac{r}{(r+1)k_1} \left\{ k_2 \varphi'_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] + \psi_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] \right\} \end{array} \right\};$$

$$(85) \quad F'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ \zeta = a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{(r+1)k_2} \left\{ k_1 \varphi'_1 \left[-a_1 + \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] + \psi_1 \left[-a_1 + \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] \right\} \\ - \frac{r-1}{2(r+1)k_2} [k_2 \varphi'_2(2a_1 - \zeta) + \psi_2(2a_1 - \zeta)], \\ \frac{1}{(r+1)k_2} \left\{ k_1 \varphi'_1 \left[a_1 + \frac{k_1}{k_2} (\zeta - a_1) \right] - \psi_1 \left[a_1 - \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] \right\} \\ - \frac{r-1}{2(r+1)k_2} [k_2 \varphi'_2(2a_1 - \zeta) + \psi_2(2a_1 - \zeta)]. \end{array} \right\}$$

Et, lorsque

$\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2 \frac{a_1}{k_1}$, ou $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$ (d'où $a_1 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 > a_1 + a_2$),

il faudra, en conservant les formules inférieures de (84) et (85), ou les expressions ci-dessus de $f'_1 \left(\frac{2a_1}{a_1} \right)$ et $F'_2 \left(\frac{a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1}{a_1} \right)$, opérer une nou-

velle scission pour les intervalles supérieurs $\frac{3a_1}{2a_1}$ et $\frac{a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2}{a_1 - \frac{k_1}{k_2} a_2}$, et prendre

$$\begin{aligned}
 (86) \quad f'_1 \left\{ \begin{array}{l} 3a_1 \\ \zeta = a_1 + \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 2a_1 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{r-1}{2(r+1)k_1} [-k_1 \varphi'_1(\zeta - 2a_1) - \psi_1(\zeta - 2a_1)] \\ + \frac{r}{(r+1)k_1} \left\{ -k_2 \varphi'_2 \left[a_1 + 2a_2 - \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] + \psi_2 \left[a_1 + 2a_2 - \frac{k_1}{k_2} (\zeta - a_1) \right] \right\} \\ \frac{r-1}{2(r+1)k_1} [-k_1 \varphi'_1(\zeta - 2a_1) - \psi_1(\zeta - 2a_1)] \\ + \frac{r}{(r+1)k_1} \left\{ k_2 \varphi'_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] + \psi_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (\zeta - a_1) \right] \right\} \end{array} \right\}; \\
 (87) \quad F'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 - 2\frac{k_2}{k_1} a_1 \\ \zeta = a_1 - a_2 \\ a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(r+1)k_2} \left\{ -k_1 \varphi'_1 \left[-a_1 + \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] - \psi_1 \left[-a_1 + \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] \right\} \\ - \frac{r-1}{2(r+1)k_2} [-k_2 \varphi'_2(2a_2 + \zeta) + \psi_2(2a_2 + \zeta)]; \\ \frac{1}{(r+1)k_2} \left\{ -k_1 \varphi'_1 \left[-a_1 + \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] - \psi_1 \left[-a_1 + \frac{k_1}{k_2} (a_1 - \zeta) \right] \right\} \\ - \frac{r-1}{2(r+1)k_2} [k_2 \varphi'_2(2a_1 - \zeta) + \psi_2(2a_1 - \zeta)]. \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Et l'on en déduira les valeurs des fonctions F'_1 et f'_2 au moyen de (80),

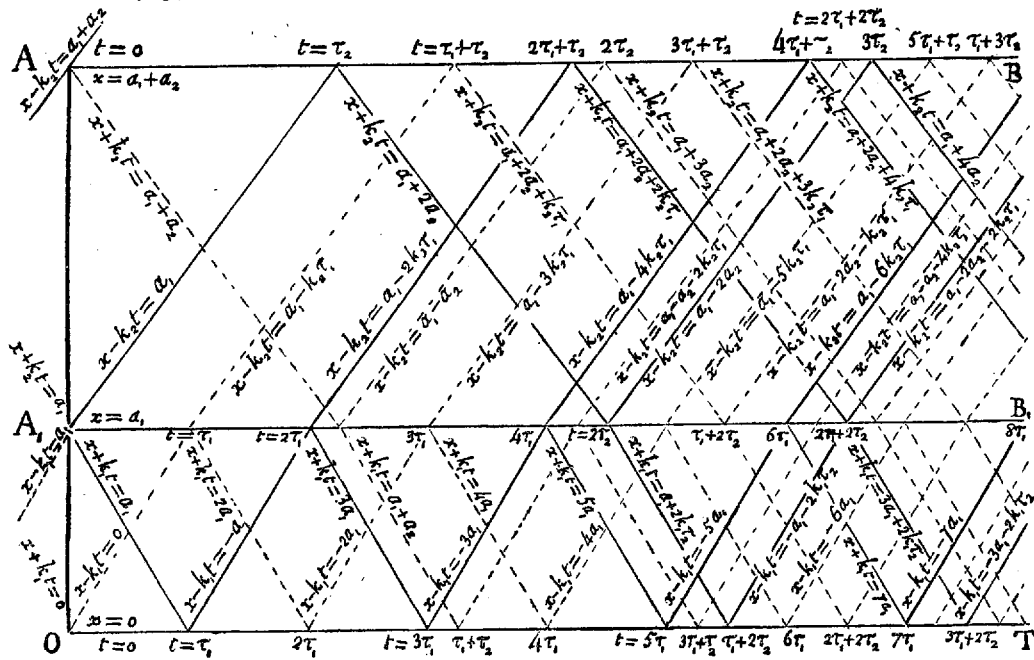
$$(88) \quad F'_1(\zeta) = -f'_1(-\zeta), \quad f'_2(\zeta) = -F'_2(2a_1 + 2a_2 - \zeta).$$

Pour passer, par le moyen des mêmes formules promotrices (82), aux valeurs que prennent les quatre fonctions quand leurs variables s'accroissent de nouveau de (83) $2a_1$, $-2a_1$, $2\frac{k_2}{k_1}a_1$, $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$, et ainsi indéfiniment, il faudra opérer de nouvelles scissions qui seront en nombre de plus en plus grand ainsi que les changements brusques de formes de ces fonctions, essentiellement discontinues comme on voit.

Les limites de ces scissions ou coupures d'intervalles seront fournies facilement et sans méprises par une construction comme celle (23) qui a été faite au n° 3, c'est-à-dire par une représentation, en prenant cette fois-ci, non plus les kt , mais les temps t eux-mêmes pour abscisses comptées sur une droite OT, et des ordonnées x prises perpendiculairement à cette droite, de la marche en deux sens, avec des vitesses k_1 et k_2 , de points d'ébranlement partant à la fois des extrémités $x = 0$ et $x = a_1 + a_2$, et de la jonction $x = a_1$ des deux barres ou parties

de barres $OA_1 = a_1$, $A_1A = a_2$, comme si tous leurs points matériels étaient transportés latéralement ou parallèlement à OT avec une vitesse

(89)



commune quelconque. On a ponctué les lignes d'ébranlement qui tirent leur origine des extrémités libres O, A, et tracé plein celles qui partent de la jonction A₁. Celles de la partie supérieure, relatives à la barre a_2 , n'ont pas, comme dans la figure du n° 3, les mêmes inclinaisons que celles de la partie inférieure relative à la barre a_1 , car k_2 n'est pas égal à k_1 . On peut remarquer aussi, dans la figure ci-contre, un grand nombre de lignes inclinées dont les analogues ne se trouvent pas dans la figure ou le diagramme n° 23 que nous citons; cela vient de ce qu'ici, en raison de la différence de grosseur et de matière des deux parties a_1 , a_2 , les ébranlements se *réfléchissent* non-seulement aux extrémités libres $x = 0$, $x = a_1 + a_2$, mais *aux extrémités jointives* $x = a_1$, ce qui ne les empêche pas, en même temps, de passer ou de se *réfracter* en quelque sorte d'une barre dans l'autre avec d'autres vitesses.

On a écrit, sur quelques-unes de ces lignes inclinées, comme au n° 3,

leurs équations en x et t , ou, ce qui revient au même, les valeurs correspondantes de $x + k_1 t$ ou $x + k_2 t$ qui sont des quantités constantes pour toutes les lignes *descendantes* (de gauche à droite), et celles de $x - k_1 t$ ou $x - k_2 t$ qui sont des quantités constantes pour les lignes *montantes*. Et les autres pourront s'écrire facilement en prenant constamment, dans la partie inférieure, $x \pm k_1 t$ égal à $\pm$ le produit de k_1 par l'abscisse de l'intersection de la ligne inclinée correspondante avec l'horizontale OT du bas; et, dans la partie supérieure, relative à a_2 , $x \pm k_2 t$ égal à $a_1 + a_2 \pm$ le produit par k_2 de l'abscisse t du point où la ligne inclinée correspondante coupe AB, qui est une parallèle à OT.

Pour tous les points matériels et les instants qui sont représentés par les points de la figure se trouvant dans l'intérieur de chaque quadrilatère ou triangle, les fonctions f'_1 , F'_1 ou f'_2 , F'_2 ont, non pas une même grandeur constante comme au n° 3, mais *une même forme* ou *une même expression* en ψ_1 , φ'_1 ou ψ_2 , φ'_2 ; forme ou expression qui change brusquement quand on passe d'un espace à l'autre. Il s'ensuit que les valeurs constantes de $x + k_1 t$, pour deux parallèles voisines, indiqueront *les limites consécutives de la variable ζ de f'_1* , et les valeurs constantes de $x - k_2 t$ indiqueront de même *les limites des valeurs de la variable ζ de F'_2* .

La figure est faite pour le cas

$$2\tau < \tau_2, \quad \text{ou} \quad 2 \frac{a_1}{k_2} < \frac{a_2}{k^2}.$$

On peut, dans les autres cas, se dispenser d'en construire d'autres, quand on a besoin seulement de poser les expressions comme (84) à (88) des fonctions f , F ; car il suffit de ranger suivant leur ordre de grandeur les abscisses des points de OT et de AB selon les diverses relations de $\frac{a_1}{k_1}$ à $\frac{a_2}{k_2}$, pour en déduire facilement, comme on vient de dire, les limites diverses de scission des variables $x + k_1 t$ de f'_1 et $x - k_2 t$ de F'_2 . Mais si l'on veut en déduire ensuite les valeurs (77), (78), de v_1 , j_1 , v_2 , j_2 , ces figures devront être construites, et sur une échelle un peu plus grande, comme diagrammes (n° 10, ci-après) indiquant les valeurs en question pour tous les points des barres et pour les instants successifs.

Le nombre des changements de forme des expressions des vitesses ou des contractions v_1, v_2, j_1, j_2 serait, comme on voit, infini pour un accroissement fini quelconque du temps si τ_1 était infiniment petit; c'est-à-dire si l'une des barres ou parties de barre était ou infiniment courte ou infiniment roide, ou si elle était comme une masse vibrant en bloc et non par tranches successives. Cela montre bien, comme nous l'avons dit tout à l'heure, que les solutions en termes finis ne sont point alors applicables; elles cessent même déjà de l'être quand l'une des deux parties est seulement *très-courte*, et il faut alors recourir aux solutions en séries transcendantes telles que (70), plus simples d'ailleurs, en général, quand le temps devient un multiple très-considérable de celui $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$ que le son met à parcourir la partie a_1 .

9. *Problème du choc mutuel de deux parties a_1, a_2 , de grosseurs et de matières différentes; ou, plus généralement, de leur mouvement l'une avec l'autre lorsqu'elles ont été animées respectivement d'un bout à l'autre de vitesses V_1, V_2 sans contraction initiale. Détermination, d'abord, des valeurs successives des fonctions arbitraires f, F .*

Il faut faire alors

$$(90) \quad \phi'_1 \zeta = 0, \quad \phi'_2 \zeta = 0, \quad \psi_1 \left(\zeta = \frac{a_1}{0} \right) = V_1, \quad \psi_2 \left(\zeta = \frac{a_1 + a_2}{a_1} \right) = V_2.$$

Nous prenons toujours l'origine des x à l'extrémité libre de la barre a_1 le plus tôt parcourue par l'ébranlement, les vitesses étant comptées positivement, comme au n° 4, quand elles vont dans le sens de cette barre à l'autre a_2 , et devant, pour qu'il puisse y avoir choc, être telles, quels que soient leurs signes, que

$$(91) \quad V_1 - V_2 > 0.$$

Dans ce cas simple, les subdivisions ou scissions d'intervalles hors desquelles les expressions changent de forme sont un peu moins nombreuses, parce que les diagrammes construits comme celui du numéro précédent n'ont plus les lignes d'ébranlement ponctuées qui partaient des extrémités libres $x = 0, x = a_1 + a_2$. Les fonctions f, F se réduisent en même temps à une suite de constantes, en sorte qu'on peut effacer ζ de leurs désignations. Les six formules (79) et (81)

se réduisent à

$$(92) \quad \begin{cases} f'_1 \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = -F'_1 \left(\begin{smallmatrix} -a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right) = \frac{V_1}{2k_1}, \\ f'_2 \left(\begin{smallmatrix} a_1 + 2a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right) = -F'_2 \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{smallmatrix} \right) = \frac{V_2}{2k_2}. \end{cases}$$

Et les huit formules (84) à (87) donnant f'_1 , F'_2 , ainsi que les huit autres qu'on en déduit par (88) pour F'_1 , f'_2 , se réduisent aux deux doubles formules suivantes, qu'on aurait pu, au reste, tirer directement des promotrices (82), et de (92),

$$(93) \quad \begin{cases} f'_1 \left(\begin{smallmatrix} 3a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right) = -F'_1 \left(\begin{smallmatrix} -3a_1 \\ -a_1 \end{smallmatrix} \right) = \frac{2rV_2 - (r-1)V_1}{2(r+1)k_1} = \frac{V_2}{2k_1} + \frac{1-r}{1+r} \frac{V_1 - V_2}{2k_1}, \\ f'_2 \left(\begin{smallmatrix} a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{smallmatrix} \right) = -F'_2 \left(\begin{smallmatrix} a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right) = \frac{2V_1 + (r-1)V_2}{2(r+1)k_2} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{V_1}{2k_2} + \frac{1-r}{1+r} \frac{V_1 - V_2}{2k_2} = \frac{V_2}{2k_2} + 2 \frac{V_1 - V_2}{2(1+r)k_2}. \end{cases}$$

Ces expressions (92), (93) ne nous conduisent à calculer les vitesses et les compressions que jusqu'au temps $t = 2\tau$.

Pour pouvoir aller jusqu'à $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$ comme au n° 4, il faut que nous déterminions les scissions à faire subir aux accroissements $2a_1$ et $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$ que les promotrices (82) donnent aux variables ζ de f'_1 et de F'_2 . Nous y arriverons avec sûreté, 1° en ce qui regarde f'_1 , en rangeant dans chaque cas, suivant leur ordre de grandeur croissante, les temps

$$t = \tau_1, 3\tau_1, 5\tau_1, \tau_1 + 2\tau_2, 7\tau_1, 3\tau_1 + 2\tau_2, \dots, (2i_1 + 1)\tau_1 + 2i_2\tau_2, \dots,$$

où l'ébranlement partant en deux sens du point de jonction $x = a_1$ se réfléchit à l'extrémité libre $x = 0$ de la première barre; d'où, en multipliant ces temps par k_1 , les valeurs suivantes de la variable de f'_1

$$x + k_1 t = a_1, 3a_1, 5a_1, a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2, 7a_1, 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2, \dots, (2i_1 + 1)a_1 + 2i_2\frac{k_1}{k_2}a_2, \dots$$

2° En ce qui regarde F'_2 , en rangeant de même les temps

$$t = \tau_2, 2\tau_1 + \tau_2, 4\tau_1 + \tau_2, 3\tau_2, \dots$$

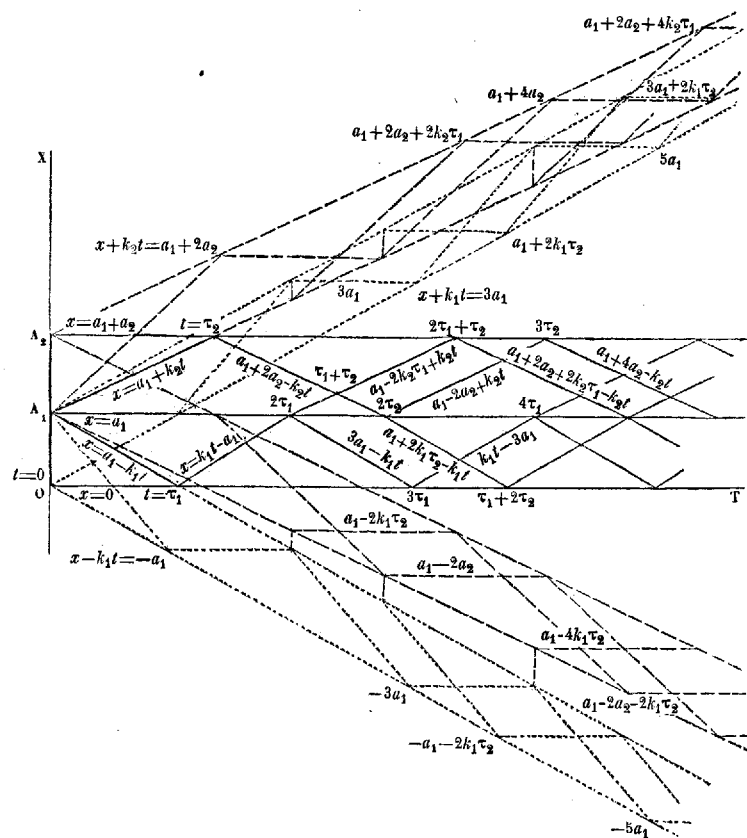
des réflexions qui s'opèrent à l'extrémité libre $x = a_1 + a_2$ de la

deuxième barre ; puis en prenant les excès de $a_1 + a_2$ sur les produits de ces temps par k_2 , ce qui donne pour les valeurs successives de la variable de F'_2

$$x - k_2 t = a_1, \quad a_1 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1, \quad a_1 - 4 \frac{k_2}{k_1} a_1, \quad a_1 - 2 a_2, \dots, \quad a_1 - 2 i_2 a_2 - 2 i_1 \frac{k_2}{k_1} a_1, \dots$$

En effet, ainsi qu'on l'a dit au numéro précédent, analogiquement à ce qui avait été remarqué au n° 4, ces deux suites donnent les valeurs des variables $x + k_1 t$, $x - k_2 t$ de f'_1 , F'_2 , entre lesquelles ces fonctions conservent les mêmes grandeurs constantes, et au delà ou en deçà desquelles les grandeurs de f'_1 , F'_2 changent brusquement [*].

(*) La figure ci-dessous, dont je me suis servi lors de la présentation de ce Mémoire, achèvera au besoin de faire comprendre ce qui vient d'être dit.



Elle est relative au cas où $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$. Les lignes pleines inclinées sont tou-

Voici un tableau qui donne, pour les diverses relations de grandeur de $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$ à $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$, l'ordre dans lequel on doit ainsi prendre les diverses limites de scission des accroissements successifs des variables

$$\zeta = x + k_1 t, \quad \zeta = x - k_2 t$$

des fonctions f'_1, F'_2 occupant les premiers membres des deux formules promotrices (82).

On y a ajouté comme première ligne, pour le compléter, les limites inférieures des mêmes variables dans les expressions (92) :

jours celles dont les ordonnées donnent les x des emplacements actuels des deux points d'ébranlement pour chaque instant, ou pour chaque abscisse t comptée sur OT; et les quatre lignes ponctuées en zigzag, dont chaque système est contenu entre deux parallèles ponctuées de même, donnent, par leurs ordonnées, les $x \pm k_1 t$ (points ronds), et les $x \pm k_2 t$ (points longs) qui y correspondent. On aperçoit bien que ces ordonnées ont pour limites successives, savoir, les $x + k_1 t$, celles

$$a_1, \quad 3a_1, \quad a_1 + 2k_1\tau_2 = a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2, \dots,$$

et les $x - k_2 t$, celles

$$a_1, \quad a_1 - 2k_1\tau_2 = a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2, \quad a_1 - 2a_2, \dots$$

des parties horizontales de deux des lignes brisées ponctuées répondant aux deux parties des lignes brisées pleines qui représentent la marche des points d'ébranlement, et nous savons (n° 3) qu'entre ces points les fonctions f'_1, F'_2 ont à chaque instant des valeurs constantes.

(94)

[illegible]

En considérant, par exemple, la sixième colonne de chiffres, intitulée $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$, l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 qu'elle indique est bien, quand τ_1 et τ_2 ont cette relation, celui des grandeurs des temps $t = 0, \tau_1, 3\tau_1, \tau_1 + 2\tau_1, 5\tau_1, 3\tau_1 + 2\tau_2, \dots$ inscrits dans la première colonne du tableau, et, par suite, des $x + k_1 t, x - k_2 t$ correspondants, dont les valeurs sont inscrites dans les deux colonnes de limites de scission.

Dans chaque colonne de chiffres, il ne peut pas y en avoir plus qu'on n'en a mis, et les suites sont essentiellement bornées tant que le rapport de grandeur de τ_1 à τ_2 n'est pas plus déterminé que par les relations telles que $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$, etc.; car, en prenant encore pour exemple la sixième colonne qui porte ce titre, il est évident qu'après le temps $t = 3\tau_1 + 4\tau_2$, qui répond au chiffre 10, on aurait, si l'on continuait par grandeur croissante, *l'un ou l'autre* des temps $t = 9\tau_1$ et $t = \tau_1 + 6\tau_2$ qui répondent aux guillemets mis à la même colonne. Or on ne sait pas, d'après une pareille relation de grandeur, donnée entre τ_1 et τ_2 , si l'on a $9\tau_1 >$ ou $< \tau_1 + 6\tau_2$, car c'est la même chose que $\tau_2 <$ ou $> \frac{4}{3}\tau_1$, et l'on ignore lequel des deux a lieu, puisque $\frac{4}{3}\tau_1$ est compris entre $\frac{2}{3}\tau_1$ et $\frac{3}{2}\tau_1$, limites entre lesquelles peut varier τ_2 par hypothèse. La suite des rangements par ordre de grandeur a donc dû être arrêtée au chiffre 10.

De même, dans les autres colonnes de chiffres, les guillemets répondent à deux valeurs de t de la colonne des temps, dont l'ordre de grandeur mutuelle est incertain, ce que l'on reconnaît si, en les retranchant l'une de l'autre et divisant par le coefficient de τ_2 , la fraction qui affecte alors τ_1 est comprise entre celles dans les limites desquelles $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ peut varier. Comme on ne sait, ainsi, lequel de ces deux temps est le plus grand, on doit les retrancher l'un et l'autre de la série ainsi que tous les temps plus considérables.

On voit que pour avoir les valeurs des fonctions f'_1, F'_1, f''_2, F'_2 , quand le temps croît, il faut faire de plus en plus de ces distinctions de grandeurs relatives de τ_1 et τ_2 dont Cauchy a donné le premier exemple par sa distinction (n° 4) des cas $a_2 > 2a_1$ et $a_2 < 2a_1$, quand $k_1 = k_2$.

En scindant, suivant ces séries, les accroissements $2a_1$ et $-2\frac{k_2}{k_1}a_1$ que les formules promotrices (82) apportent aux variables des fonctions f'_1 , F'_1 , occupant leurs premiers membres, les variables des fonctions F'_1, f'_2 qui se trouvent dans les troisièmes membres resteront dans les limites pour lesquelles on a précédemment obtenu les expressions de ces dernières fonctions.

On trouve ainsi, en faisant, pour abrégé,

$$(95) \left\{ \begin{array}{l} V_1 - V_2 = W, \\ \frac{V_1 - V_2}{1+r} = W_r, \quad \frac{1-r}{1+r} (V_1 - V_2) = W'_r, \quad \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} (V_1 - V_2) = W''_r, \quad \frac{(1-r)^3}{(1+r)^3} (V_1 - V_2) = W'''_r, \dots, \\ \frac{V_1 - V_2}{(1+r)^2} = W_{rr}, \quad \frac{1-r}{(1+r)^2} (V_1 - V_2) = W'_{rr}, \quad \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} (V_1 - V_2) = W''_{rr}, \quad \frac{(1-r)^3}{(1+r)^3} (V_1 - V_2) = W'''_{rr}, \dots, \\ \frac{V_1 - V_2}{(1+r)^3} = W_{rrr}, \quad \frac{1-r}{(1+r)^3} (V_1 - V_2) = W'_{rrr}, \quad \frac{(1-r)^2}{(1+r)^3} (V_1 - V_2) = W''_{rrr}, \dots \end{array} \right.$$

les formules ci-après (98) à (111), que nous faisons précéder, sous les désignations (96) et (97), de celles (92), (93) précédemment trouvées, afin de rendre le tableau complet (voir aussi après).

CAS GÉNÉRAL $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ (ou $\tau_1 < \tau_2$) sans autre détermination :

(96)

$$\begin{aligned} 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ 0 \end{array} \right\} &= -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{array}{l} -a_1 \\ a_1 \end{array} \right\} = V_1, \\ 2k_2 f'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2a_2 \\ a_1 \end{array} \right\} &= -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{array} \right\} = V_2; \end{aligned}$$

(97)

$$\begin{aligned} 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{array}{l} 3a_1 \\ a_1 \end{array} \right\} &= -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{array}{l} -3a_1 \\ -a_1 \end{array} \right\} = V_2 + \frac{1-r}{1+r} (V_1 - V_2) = V_1 - 2rW_r = V_2 + W'_r, \\ 2k_2 f'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{array} \right\} &= -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 \end{array} \right\} = V_2 + 2\frac{V_1 - V_2}{1+r} = V_1 + W'_r = V_2 + 2W'_r; \end{aligned}$$

(98) Cas $2 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ (ou $2\tau_1 < \tau_2$), comme (96), (97); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \begin{Bmatrix} 5a_1 \\ 3a_1 \end{Bmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{Bmatrix} -5a_1 \\ -3a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + W''_n,$$

$$2k_2 f'_2 \begin{Bmatrix} a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = -2k_2 F'_2 \begin{Bmatrix} a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + 2W''_n;$$

(99) Cas $3 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$, comme (96), (97), (98); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \begin{Bmatrix} 7a_1 \\ 5a_1 \end{Bmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{Bmatrix} -7a_1 \\ -5a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + W'''_m,$$

$$2k_2 f'_2 \begin{Bmatrix} a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = -2k_2 F'_2 \begin{Bmatrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + 2W'''_m;$$

(100) Cas $4 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$, comme (96), (97), (98), (99); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \begin{Bmatrix} 9a_1 \\ 7a_1 \end{Bmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{Bmatrix} -9a_1 \\ -7a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + W^{IV}_{iv},$$

$$2k_2 f'_2 \begin{Bmatrix} a_1 + 2a_2 + 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = -2k_2 F'_2 \begin{Bmatrix} a_1 - 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + 2W^{IV}_{iv};$$

(101) Cas $5 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$, comme (96), (97), (98), (99), (100); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \begin{Bmatrix} 11a_1 \\ 9a_1 \end{Bmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{Bmatrix} -11a_1 \\ -9a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + W^V_v$$

$$2k_2 f'_2 \begin{Bmatrix} a_1 + 2a_2 + 10\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = -2k_2 F'_2 \begin{Bmatrix} a_1 - 10\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{Bmatrix} = V_2 + 2W^V_v;$$

(102) Cas $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \begin{pmatrix} 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 5a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 3a_1 \end{pmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{pmatrix} -3a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 \\ -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -3a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 4rW'' + W''' = V_1 - 2rW'' \\ V_2 + W = V_1 \\ V_2 + W'' \end{cases}$$

$$2k_2 f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix} = -k_2 F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 - 2W' + 2W'' = V_2 - 4rW' \\ V_2 \\ V_2 + 2W'' \end{cases}$$

(103) Cas $2 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 3 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (98); et, de plus :

$$2k_1 f'_1 \begin{pmatrix} 7a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 5a_1 \end{pmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{pmatrix} -7a_1 \\ -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 4rW'' + W''' = V_1 - 2rW'' \\ V_2 + W''' \end{cases}$$

$$2k_1 f'_1 \begin{pmatrix} 5a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 9a_1 \\ 3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ 7a_1 \end{pmatrix} = -2k_1 F'_1 \begin{pmatrix} -5a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -9a_1 \\ -3a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -7a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 8rW' + W'' \\ V_2 + 8rW' + W'' \\ V_2 + 4rW'' + W'' = V_1 - 4rW'' \end{cases}$$

$$2k_2 f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix} = -2k_2 F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 - 2W' + 2W'' = V_2 - 4rW' \\ V_2 + 2W'' \end{cases}$$

$$2k_2 f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix} = -2k_2 F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 8\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 8rW'' - 8rW' \\ V_2 + 8rW'' - 4rW'' \\ V_2 - 8rW'' \end{cases}$$

(104) Cas $3 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 4 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (98), (99); et, de plus:

$$2 k_1 f'_1 \begin{pmatrix} 9 a_1 \\ a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 7 a_1 \end{pmatrix} = -2 k_1 F'_1 \begin{pmatrix} -9 a_1 \\ -a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -7 a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 4 r W_\mu + W_{IV}^{IV} = V_1 - 4 r W_{IV}'' \\ V_2 + W_{IV}^{IV}, \end{cases}$$

$$2 k_1 f'_1 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ 11 a_1 \\ 3 a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 9 a_1 \end{pmatrix} = -2 k_1 F'_1 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ -11 a_1 \\ -3 a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -9 a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 8 r W_\mu' + W_V^V \\ V_2 + 4 r W_\mu + W_V^V; \end{cases}$$

$$2 k_2 f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 2 a_2 + 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4 a_2 \\ a_1 + 2 a_2 + 6 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = -2 k_2 F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2 a_2 \\ a_1 - 6 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 - 8 r W_{IV}' \\ V_2 + 2 W_{IV}''; \end{cases}$$

$$2 k_2 f'_2 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_1 + 2 a_2 + 10 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4 a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 2 a_2 + 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = 2 k_2 F'_2 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_1 - 10 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2 a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 + 32 r^2 W_V \\ V_2 - 2 W_\mu' + 2 W_V^{IV}. \end{cases}$$

(105) Cas $4 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 5 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (98), (99), (100); et, de plus:

$$2 k_1 f'_1 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ 11 a_1 \\ a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 9 a_1 \end{pmatrix} = -2 k_1 F'_1 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ -11 a_1 \\ -a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -9 a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_1 - W_\mu'' + W_V^V = V_2 + 4 r W_\mu + W_V^V \\ V_2 + W_V^V; \end{cases}$$

$$2 k_2 f'_2 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_1 + 2 a_2 + 10 \frac{k_2}{k_1} a_2 \\ a_1 + 4 a_2 \\ a_1 + 2 a_2 + 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = -2 k_2 F'_2 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_1 - 10 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2 a_2 \\ a_1 - 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} V_2 - 2 W_\mu' + 2 W_V^{IV} \\ V_2 + 2 W_V^{IV}; \end{cases}$$

(106) Cas $2 \frac{a_1}{k_1} < 2 \frac{a_2}{k_2} < 3 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (102); et, de plus :

$$2 k_1 f'_1 \begin{pmatrix} 3 a_1 + 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 5 a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 7 a_1 \\ a_1 + 4 \frac{k_1}{k_1} a_2 \\ 3 a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \end{pmatrix} = - 2 k_1 F'_1 \begin{pmatrix} - 3 a_1 - 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ - 5 a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ - 7 a_1 \\ - a_1 - 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ - 3 a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 + W''_m - 4 r W''_m + 8 r W''_{IV} \\ V_2 + W'_I - 2 r W''_{IV} \\ V_2 + W'_I \\ V_2 + 2 W'_I - W'''_m \end{pmatrix}$$

$$2 k_2 f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 6 a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4 a_2 + 4 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 2 a_2 + 6 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 6 a_2 \\ a_1 + 4 a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = - 2 k_2 F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 4 a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2 a_2 - 4 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 6 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 4 a_2 \\ a_1 - 2 a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 + 2 W''_m + 16 r W'_{IV} \\ V_2 + 2 W'_I - 4 r W''_{IV} \\ V_1 + W'_I = V_2 + 2 W'_I \\ V_2 + 2 W'_I - 2 W''_m \end{pmatrix}$$

(107) Cas $3 \frac{a_1}{k_1} < 3 \frac{a_2}{k_2} < 4 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (102), (106); et, de plus :

$$2 k_1 f'_1 \begin{pmatrix} \dots \dots \dots \\ 9 a_1 \\ a_1 + 6 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 3 a_1 + 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \end{pmatrix} = - 2 k_1 F'_1 \begin{pmatrix} \dots \dots \dots \\ - 9 a_1 \\ - a_1 - 6 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ - 3 a_1 - 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 + 4 r W_m + W_{IV} = V_1 - 4 r W''_{IV} \end{pmatrix}$$

$$2 k_2 f'_2 \begin{pmatrix} \dots \dots \dots \\ a_1 + 2 a_2 + 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 8 a_2 \\ a_1 + 6 a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = - 2 k_1 F'_4 \begin{pmatrix} \dots \dots \dots \\ a_1 - 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 6 a_2 \\ a_1 - 4 a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ V_2 + 2 W'''_{IV} \end{pmatrix}$$

(108) Cas 3 $\frac{a_1}{k_1} < 2 \frac{a_2}{k_2} < 4 \frac{a_1}{k_1}$, comme (96), (97), (102); et, de plus :

$$\begin{aligned}
 2 k_2 f'_1 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ 9a_1 \\ 5a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ a_1 + 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 7a_1 \\ 3a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \end{pmatrix} &= -2 k_1 F'_1 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ -9a_1 \\ -5a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -a_1 - 4 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -7a_1 \\ -3a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 + W'' - 4r W''_{iv} + 8r W''_{iv} \\ V_2 + W' - 2r W'''_{iv} \\ V_2 + 8r W'''_{iv} + W_{iv} \\ V_2 + 2W' - W'''_{iv} \end{pmatrix} \\
 2 k_2 f'_2 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_1 + 2a_2 + 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 4 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 6a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 6 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} &= -2 k_2 F'_2 \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ a_1 - 8 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 4 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 4a_2 \\ a_1 - 6 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 + 4W' + 4r W''_{iv} - 2W'''_{iv} \\ V_2 + 2W' - 4r W'''_{iv} \\ V_2 + 8r W'''_{iv} - 4r W'''_{iv} \\ V_2 + 2W' - 2W'''_{iv} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On voit que dans chacun des cas particuliers à partir de (98), l'on renvoie, pour les premiers et plus petits intervalles non mentionnés des valeurs des variables, à des formules déjà établies, relatives à des cas précédemment traités. C'est que ceux-ci comprennent implicitement ceux-là. Ainsi :

109)

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{le cas} \\ \text{général} \\ \tau_1 < \tau_2 \\ \text{ou} \\ \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} \\ \text{comprend} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\tau_1 < \tau_2 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1 \\ \text{qui comprend} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3\tau_1 < \tau_2 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1 \\ \text{qui comprend} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 4\tau_1 < \tau_2 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1 \\ \text{qui comprend} \\ \text{et} \\ 4\tau_1 < 2\tau_2 < 5\tau_1 \\ \text{et} \\ 5\tau_1 < 2\tau_2 < 6\tau_1 \\ \text{et} \\ 3\tau_1 < 3\tau_2 < 4\tau_1 \\ \text{et} \\ 4\tau_1 < 3\tau_2 < 5\tau_1 \\ \text{et} \\ 6\tau_1 < 4\tau_2 < 7\tau_1 \\ \text{et} \\ 7\tau_1 < 4\tau_2 < 8\tau_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 5\tau_1 < \tau_2, \\ 4\tau_1 < \tau_2 < 5\tau_1, \\ 6\tau_1 < 2\tau_2 < 7\tau_1 \\ 7\tau_1 < 2\tau_2 < 8\tau_1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Réciproquement, chacune des relations d'inégalité qui sont écrites vers la droite de ce tableau (109) entraîne celles qui sont à sa gauche. Par exemple, $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ entraîne évidemment $3\tau_1 < \tau_2$ qui entraîne à fortiori $2\tau_1 < \tau_2$ qui entraîne $\tau_1 < \tau_2$. Toutes les expressions (96 ou 97), (98), (99) de f'_1 , F'_1 , f'_2 , F'_2 , déjà obtenues pour ces trois derniers cas plus généraux, conviennent donc pour le cas plus déterminé $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ ou $3 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 4 \frac{a_1}{k_1}$; en conséquence elles ont pu servir par substitution, dans les troisièmes membres des promotrices (82), à calculer, pour ce dernier cas (108), les nouvelles valeurs de f'_1 , F'_2 , et, par suite, de F'_1 , f'_2 qui y sont rapportées, et relatives à des valeurs plus considérables de leurs variables, ou dont les limites sont plus grandes, positivement ou négativement.

Les expressions (97), (98), (99), (100), (101), et les expressions (102), (103), (104), (105), peuvent au reste être déduites, comme cas particuliers, des formules générales suivantes, démontrables directement, et où

i

représente un quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5.....

(110) QUAND $i\tau < \tau_2$, ou $i \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$,

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i+1)a_1 \\ (2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2i+1)a_1 \\ -(2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(i)}^{(i)};$$

$$2k_2 f'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 2i \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 2a_2 + (2i-2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 2i \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - (2i-2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(i)}^{(i-1)}.$$

(111) QUAND $i\tau_1 < \tau_2 < (i+1)\tau_1$, ou $i \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (i+1) \frac{a_1}{k_1}$,

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2i+3)a_1 \\ a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ (2i+1)a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2i+3)a_1 \\ -a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -(2i+1)a_1 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} V_2 + 4rW'' + W_{(i+1)}^{(i+1)}; \\ V_2 + W_{(i+1)}^{(i+1)}. \end{cases}$$

$$2k_2 f'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2a_2 + (2i+2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 2i \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{matrix} \right\} = -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - (2i+2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 2i \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} V_2 - 2W'' + 2W_{(i+1)}^{(i)}; \\ V_2 + 2W_{(i+1)}^{(i)}. \end{cases}$$

(112) QUAND, *idem*, $\left\{ \begin{array}{l} \text{et } i' \text{ étant un autre nom-} \\ \text{bre entier } > 0, \text{ et} \end{array} \right\} \begin{cases} < i \text{ pour les intervalles supérieurs,} \\ < i + 1 \text{ pour les intervalles inférieurs,} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2k_1 f'_1 & \left\{ \begin{array}{l} (2i + 2i' + 3) a_1 \\ (2i' + 1) a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ (2i + 2i' + 1) a_1 \end{array} \right\} = \\ & = -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{array}{l} -(2i + 2i' + 3) a_1 \\ -(2i' + 1) a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -(2i + 2i' + 1) a_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} V_2 - 4(i' + 1) r W_{(i'+2)}^{(i'+2)} + W_{(i+i'+1)}^{(i+i'+1)}, \\ V_2 + 4i' r W_{(i'+1)}^{(i'-1)} + W_{(i+i'+1)}^{(i+i'+1)}. \end{array} \right. \\ 2k_2 f'_2 & \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2a_2 + (2i + 2i' + 2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 4a_2 + 2i' \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 2a_2 + (2i + 2i') \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{array} \right\} = \\ & = -2k_2 F'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 - (2i + 2i' + 2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 - 2i' \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - (2i + 2i') \frac{k_2}{k_1} a_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} V_2 - 2W_{(i'+2)}^{(i'+1)} + 8i' r W_{(i'+2)}^{(i'-1)} + 2W_{(i+i'+1)}^{(i+i')} \\ V_2 - 2W_{(i'+1)}^{(i')} + 8(i' - 1) r W_{(i'+1)}^{(i'-2)} + 2W_{(i+i'+1)}^{(i+i')} \end{array} \right. \end{aligned}$$

En effet, la première des formules (110) se démontre au moyen de la première promotrice (82), donnant

$$(113) \left\{ \begin{array}{l} 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{array}{l} (2i + 1) a_1 \\ (2i - 1) a_1 \end{array} \right\} = -\frac{1-r}{1+r} 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{array}{l} -(2i - 1) a_1 \\ -(2i - 3) a_1 \end{array} \right\} + \\ + \frac{2r}{1+r} 2k_2 f'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2i \frac{k_2}{k_1} a_1 \text{ qui est } < a_1 + 2a_2 \text{ vu que } 2i \frac{a_1}{k_1} < 2 \frac{a_2}{k_2} \\ a_1 + (2i - 2) \frac{k_2}{k_1} a_1 \text{ qui est } > a_1 \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

Moyennant la substitution ainsi faite, aux limites trouvées pour les variables des f'_2 du second membre, des limites plus étendues $\frac{a_1 + 2a_2}{a_1}$, nous pouvons y remplacer le $2k_2 f'_2$ par V_2 , d'après la formule (96).

Remplaçant aussi

$$F_1 \left\{ \begin{matrix} -(2i-1)a_1 \\ -(2i-3)a_1 \end{matrix} \right\} \quad \text{par} \quad -f_1' \left\{ \begin{matrix} (2i-1)a_1 \\ (2i-3)a_1 \end{matrix} \right\},$$

qui lui est égal, d'après (80), et faisant successivement $i = 1, 2, 3, \dots$, nous avons, vu (96) $2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = V_1$,

$$\text{Pour } \tau_1 < \tau_2, \quad 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} 3a_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\} = \frac{1-r}{1+r} V_1 + \frac{2r}{1+r} V_2;$$

$$2\tau_1 < \tau_2, \quad 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} 5a_1 \\ 3a_1 \end{matrix} \right\} = \frac{1-r}{1+r} 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} 3a_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\} + \frac{2r}{1+r} V_2;$$

.....

$$i\tau_1 < \tau_2, \quad 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} (2i+1)a_1 \\ (2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = \frac{1-r}{1+r} 2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} (2i-1)a_1 \\ (2i-3)a_1 \end{matrix} \right\} + \frac{2r}{1+r} V_2.$$

Ajoutant entre elles toutes ces équations, après les avoir multipliées respectivement par

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{i-1}, \quad \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{i-2}, \dots, \quad \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{i-i} = 1,$$

tous les f_1' disparaîtront, hors celui qui est dans le premier membre de la dernière, car comme

$$i\tau_1 < \tau_2 \quad \text{entraîne} \quad (i-1)\tau_1 < \tau_2, \dots, \quad 2\tau_1 < \tau_2, \quad \tau_1 < \tau_2,$$

le f_1' du premier membre de chaque équation a la même valeur que le f_1' de même nom du second membre de la suivante. Et comme on a

$$1 + \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{i-1} = \frac{1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^i}{1 - \frac{1-r}{1+r}} = \frac{1+r}{2r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^i \right],$$

il en résulte

$$2k_1 f_1' \left\{ \begin{matrix} (2i+1)a_1 \\ (2i-1)a_1 \end{matrix} \right\} = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^i V_1 + \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^i \right] V_2,$$

ou précisément la première formule (110).

La deuxième formule (110) s'obtiendra de la deuxième promotrice (82), en mettant, pour le $2k_1 F'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} (2i-1)a_1 \\ (2i-3)a_1 \end{smallmatrix} \right\}$ qu'on aura dans le dernier membre, ce que donne la première (110) avec $i-1$ mis au lieu de i , ce qui est permis, puisque $i\tau_1 < \tau_2$ entraîne $(i-1)\tau_1 < \tau_2$.

La première expression (111) se tirera de la première promotrice (82) fournissant

$$(114) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} (2i+3)a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_2 \\ (2i+1)a_1 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1-r}{1+r} 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} -(2i+1)a_1 \\ a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -(2i-1)a_1 \end{smallmatrix} \right\} + \\ & + \frac{2r}{1+r} 2k_1 f'_2 \left\{ \begin{smallmatrix} a_1 + (2i+2)\frac{k_2}{k_1}a_1 & \text{qui est} < a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_1 + 2i\frac{k_2}{k_1}a_1 & \text{qui est} > a_1 \end{smallmatrix} \right\}; \end{aligned} \right.$$

car on peut remplacer le $2k_1 F'_1$ du second membre par sa valeur que donne la première formule (110), sans avoir besoin d'y considérer la limite intermédiaire $a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2$ et, moyennant la substitution qu'on voit que nous avons pu faire, dans le $2k_2 f'_2$, de limites plus larges et qui sont celles de sa variable dans (96) et dans (97), on a, pour ses valeurs, V_2 dans l'intervalle inférieur, et $V_2 + 2W_1$ dans l'intervalle supérieur. Ces substitutions donnent précisément la première expression (111). La deuxième se déduit d'une manière toute semblable de la deuxième promotrice (82), dont le dernier membre contient les mêmes F'_1 et f'_2 .

La première expression (112) se déduit de la première promotrice, donnant

$$(115) \left\{ \begin{aligned} & 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{aligned} & (2i + 2i' + 3)a_1 \\ & (2i' + 1)a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ & (2i + 2i' + 1)a_1 \end{aligned} \right\} = -\frac{1-r}{1+r} 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{aligned} & -(2i + 2i' + 1)a_1 \\ & -(2i' + 1)a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ & -(2i + 2i' - 1)a_1 \end{aligned} \right\} + \\ & + \frac{2r}{1+r} 2k_2 f'_2 \left\{ \begin{aligned} & a_1 + (2i + 2i' + 2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \quad \text{qui est} < a_1 + 2a_2 + (2i' + 2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ & a_1 + 2a_2 + 2i'\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ & a_1 + (2i + 2i')\frac{k_2}{k_1}a_1 \quad \text{qui est} > a_1 + 2a_2 + (2i' - 2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

Moyennant la substitution de limites, ainsi faite comme conséquence de $2i\frac{a_1}{k_1} < 2\frac{a_2}{k_2}$ et de $2(i+1)\frac{a_1}{k_1} > 2\frac{a_2}{k_2}$, la partie inférieure et la partie supérieure du $2k_2 f'_2$ seront données par la deuxième formule (110) en y faisant successivement $i = i'$ et $i = i' + 1$, ce qui est ici permis, puisque, pour ces deux parties, i' est respectivement supposé au plus égal à i et au plus égal à $i - 1$; en sorte que $i\tau_1 < \tau_2$ entraîne respectivement $i'\tau_1 < \tau_2$ et $(i' + 1)\tau_1 < \tau_2$.

Quant au F'_1 , supposons un instant que la première formule (112) que nous voulons démontrer le soit déjà pour une valeur de i' inférieure d'une unité à la valeur indéterminée qu'on lui attribue ici; on aura les deux parties du $-2k_1 F'_1$ en remplaçant i' par $i' - 1$ dans le dernier membre de cette formule (112). On trouvera précisément, en réduisant, cette même formule posée.

Or cette première formule (112) est vraie quand on suppose $i' = 1$, car on l'établit alors en remplaçant i' par 1 dans ce qui multiplie $\frac{2r}{1+r}$, et en mettant, au lieu de ce qui multiplie $\frac{1-r}{1+r}$, l'expression démon-

trée (111) de $-2k_1 F'_1 \left\{ \begin{aligned} & -(2i + 3)a_1 \\ & -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ & -(2i + 1)a_1 \end{aligned} \right\}$. La formule (112) donnant f'_1 ,

et aussi, de la même manière, celle qui donne f'_2 , sont donc prouvées pour i' quelconque, dans les limites de 1 à i pour les intervalles inférieurs, et de 1 à $i - 1$ inclusivement pour les intervalles supérieurs.

Ces formules générales (112) ne s'appliquent, comme on voit, que jusqu'à

$$f'_1 \begin{pmatrix} (2i+1)a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ (4i+1)a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 - 2i\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4i\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix},$$

ou jusqu'à des valeurs des variables de f'_1 et F'_2 qui répondent, dans le tableau (94), à

$$t = (2i+1)\tau_1 + 2\tau_2.$$

C'est là, en effet, que s'arrêteraient les chiffres indicatifs de l'ordre de grandeur des temps dans une colonne de ce tableau intitulée $i\tau_1 < \tau_2 < (i+1)\tau_1$, puisque, tant que la relation de τ_1 à τ_2 n'est pas plus déterminée, on ne sait lequel est le plus grand des deux temps $(4i+3)\tau_1$ et $\tau_1 + 4\tau_2$, qui devraient suivre.

Pour les deux cas

$$2\frac{a_1}{k_1} < 2\frac{a_2}{k_2} < 3\frac{a_1}{k_1}, \quad 3\frac{a_1}{k_1} < 2\frac{a_2}{k_2} < 4\frac{a_1}{k_1},$$

plus particuliers que le cas (102) $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2\frac{a_1}{k_1}$ qui les comprend, on a, dans (106) et (108), poussé plus loin que les limites supérieures $3a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2$ et $a_1 - 2a_2 - 2\frac{k_2}{k_1}a_1$, relatives à ce cas plus général, celles des variables de f'_1 et F'_2 , en appliquant, à partir de là, les promotrices (82), qui offrent, pour le premier cas, dans leurs derniers membres,

$$F'_1 \begin{pmatrix} -a_1 - 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -3a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -5a_1 \\ a_1 - 4\frac{k_1}{k_2}a_2 \\ -a_1 - 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{pmatrix}.$$

En effaçant comme inutiles les limites intermédiaires $a_1 - 4 \frac{k_1}{k_2} a_2$ dans F'_1 , et $a_1 + 6 \frac{k_2}{k_1} a_1$ dans f'_2 , les valeurs successives à mettre pour ces deux fonctions, en commençant par les intervalles du bas, seront fournies par les expressions (102) relatives à $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2 \frac{a_1}{k_1}$; et, dans le haut, pour le dernier intervalle de la variable de F'_1 , la valeur de cette fonction sera celle qu'on aura déjà calculée pour un intervalle du bas de la formule (106) à établir. On fera de même pour les formules (108), et d'une manière analogue pour celles (107).

Les limites intermédiaires qu'on supprime ainsi dans les derniers membres, et les limites extrêmes qu'on remplace, comme on a vu, par d'autres plus larges, seraient des valeurs de $x + k_1 t$ et $x - k_2 t$, qui dans la fig. 89 du n° 8, répondraient à des lignes de même inclinaison ne présentant pas de marches d'ébranlement parties du point de jonction A_1 .

En ayant égard aux observations qu'on vient de faire, et en ayant toujours soin, lorsqu'on opère des substitutions dans les derniers membres des formules (82) que nous appelons *promotrices*, de n'employer, parmi les formules déjà établies, que celles qui sont relatives au cas où l'on se trouve, ou à ceux dans lesquels il est compris d'après le tableau (109), on évitera toute erreur dans ces recherches naturellement compliquées, et l'on pourra obtenir, aussi loin qu'on voudra, les valeurs des quatre fonctions F', f' , pour des relations de grandeur de plus en plus déterminées entre $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$ et $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$.

10. Suite de la solution pour deux barres de grosseurs et de matières différentes. — *Calcul des vitesses et des compressions aux instants successifs.* — Ayant, par les formules (96) à (108), et autres analogues, les valeurs des quatre fonctions f'_1, f'_2, F'_1, F'_2 pour les grandeurs diverses de leurs variables, on peut immédiatement en déduire celles des vitesses v et des compressions j :

$$(116) \begin{cases} v_1 = k_1 f'_1(x + k_1 t) - k_1 F'_1(x - k_1 t), & j_1 = -f'_1(x + k_1 t) - F'_1(x - k_1 t), \\ v_2 = k_2 f'_2(x + k_2 t) - k_2 F'_2(x - k_2 t), & j_2 = -f'_2(x + k_2 t) - F'_2(x - k_2 t), \end{cases}$$

pour des valeurs déterminées de x et de t , en ayant seulement l'atten-

tion, lorsque ces valeurs rendent $x \pm k_1 t$ ou $x \pm k_2 t$ justement égales aux limites où la grandeur d'une des fonctions change brusquement, de faire cesser l'ambiguïté en prenant successivement des valeurs de x ou de t infiniment peu au-dessous ou infiniment peu au-dessus de celles qu'on voulait leur assigner.

Mais comme il s'agit ici de déterminer complètement dans quelles limites successives de temps écoulé, et de situation sur les deux barres, les vitesses et les compressions prennent telles ou telles valeurs, nous construirons des tableaux ou diagrammes semblables à ceux qui ont été donnés ci-dessus, et principalement au (89) du n° 8, en retranchant les lignes inclinées *ponctuées* qui sont inutiles, avons-nous dit, quand les deux barres n'avaient pas de compressions au moment de leur jonction; et nous inscrirons dans leurs cases, comme nous avons fait au n° 3, pour le cas où les deux barres étaient de même section et de même matière, les expressions de

$$\begin{aligned} {}_2k_1 f'_1(x + k_1 t), \quad {}_2k_2 f'_2(x + k_2 t), \\ {}_2k_1 F'_1(x - k_1 t), \quad {}_2k_2 F'_2(x - k_2 t), \end{aligned}$$

tirées des formules (96) à (111), et relatives aux valeurs de leurs variables, limitées respectivement par celles qui sont cotées sur les deux lignes descendantes parallèles, et sur celles qui sont cotées sur les deux lignes ascendantes parallèles intérieures ou extérieures, entre lesquelles la case est comprise.

Voici l'un de ces diagrammes. Dans chacune des cases on a inscrit l'expression du ${}_2k_1 f'_1$ ou ${}_2k_2 f'_2$ relatif à tous ses points, et, *au-dessous*, celle du ${}_2k_1 F'_1$ ou ${}_2k_2 F'_2$.

Par exemple : 1° Dans le triangle, dans les trois parallélogrammes et dans le petit trapèze ainsi que dans le petit triangle compris entre les lignes descendantes

$$x + k_2 t = a_1 + 2a_2 \quad \text{et} \quad x + k_2 t = a_1 + 2a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1,$$

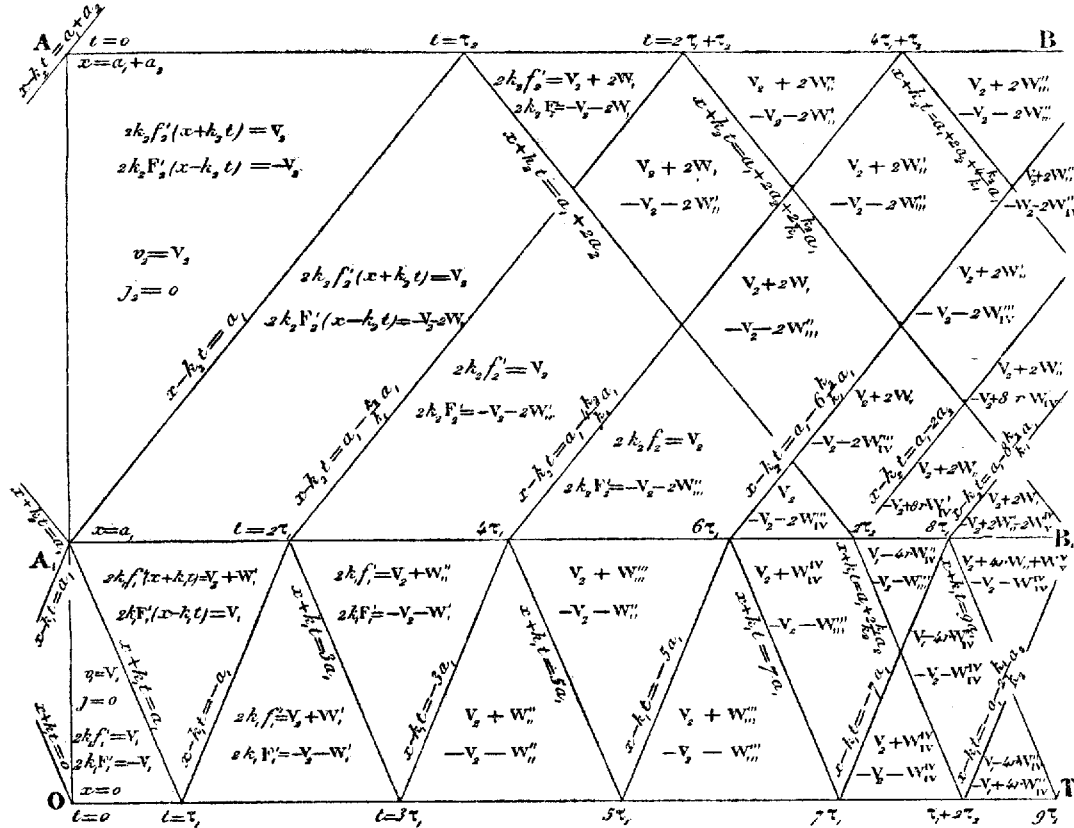
on a, pour valeur de ${}_2k_2 f'_2$, écrit $V_2 + 2W_1$, parce que la formule (97) relative au cas $\tau_1 < \tau_2$, qui comprend le cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, donne

bien cette valeur à

$$2k_2 f'_2 \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2a_2 + 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{array} \right\}.$$

(117)

CAS $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$.



2° Dans le troisième de ces parallélogrammes, ainsi que dans le petit triangle et dans l'autre parallélogramme, qui sont compris entre les lignes ascendantes

$$x - k_2 t = a_1 - 6 \frac{k_1}{k_2} a_1 \quad \text{et} \quad x - k_2 t = a_1 - 2a_2,$$

on a écrit, pour $2k_2 F'_2$, la valeur tirée de la formule (105) relative au

cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, qui donne

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 2a_2 \\ a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = -V_2 - 2W'''_{iv}.$$

C'était bien en effet de cette formule (105) qu'il fallait la tirer, et non pas de la formule (101) qui est relative à $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$, et qui eût donné

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix} \right\} = -V_2 + 4rW'_m.$$

3° Dans le trapèze, les deux parallélogrammes et le triangle compris entre les lignes montantes $a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1$ et $a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1$, on a tiré le $2k_2 F'_2$ de la formule (100), car elle est relative à $3\tau_1 < \tau_2$ qui comprend $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, et cette formule donne

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 6\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \end{matrix} \right\} = -V_2 - 2W''_m.$$

Et ainsi des autres.

En formant, comme on a dû le faire, des diagrammes semblables relatifs aux autres cas

$$2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1, \quad 3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1, \quad 2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1,$$

il a fallu de même :

Pour $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$, entre les lignes ascendantes

$$x_1 - k_2 t = a_1 - 4\frac{k_2}{k_1}a_1 \quad \text{et} \quad a_1 - 2a_2,$$

et aussi, entre les lignes descendantes

$$x + k_1 t = 5a_1 \quad \text{et} \quad a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2,$$

tirer les

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 4 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix} \right\} = -V_2 - 2W''_m,$$

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ 5a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W'''_m,$$

de la formule (101), et non de la formule (99) relative à $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$, qui eût donné $-V_2$ et V_1 .

Et, au contraire, pour les cas $3\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1$, et $2\tau_1 < 2\tau_2 < 3\tau_1$, il a fallu prendre

$$2k_2 F'_2 \left\{ \begin{matrix} a_1 - 4 \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix} \right\} = -V_2$$

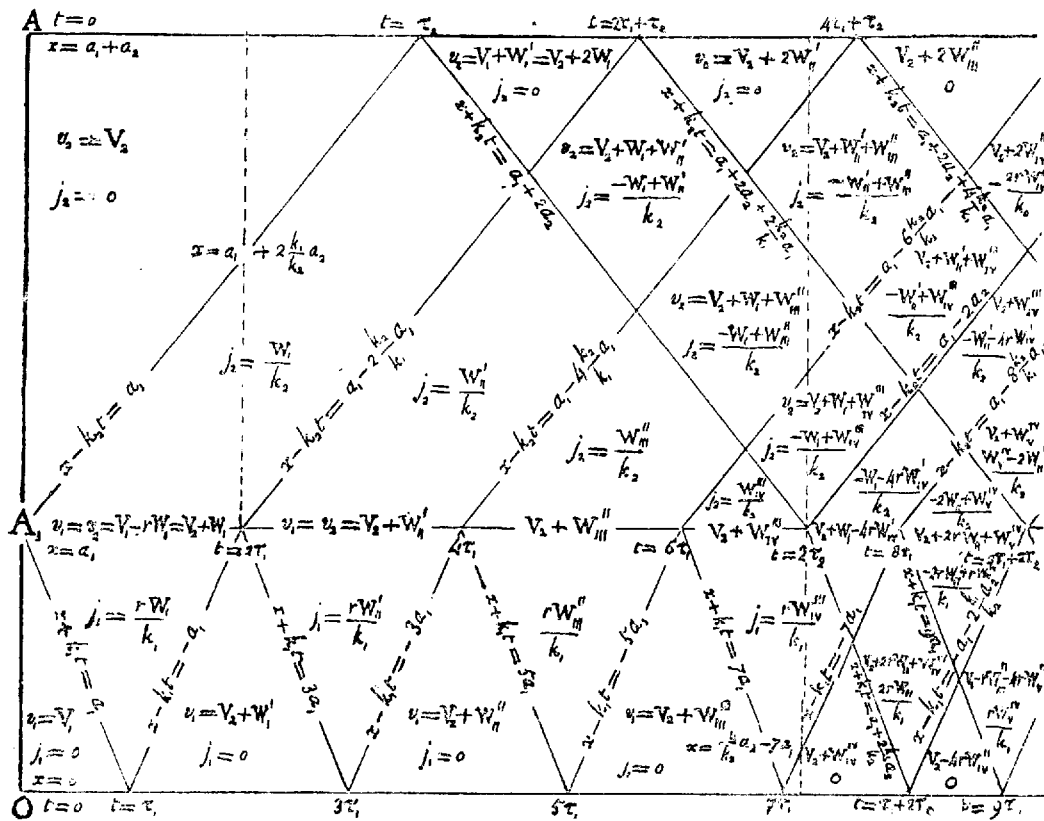
et

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} 5a_1 \\ a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \end{matrix} \right\} = V_1,$$

tirés de la formule (99) relative au cas $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$, vu qu'il comprend ces deux-ci, et non pas $-V_2 - 2W''_m$ et $V_2 + W'''_m$ qu'eût donnés la formule (101) relative à $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$.

Retranchant les $2kF'$ des $2kf'$ des diverses cases, puis divisant par 2 pour avoir les vitesses v , et en les ajoutant après les avoir pris en signe contraire, puis divisant par $2k$ pour avoir les compressions j , conformément aux expressions (116) de v_1, j_1, v_2, j_2 , nous avons obtenu, après diverses réductions fondées sur la définition (95) des fonctions W , les quatre diagrammes ci-dessous (118), (119), (120), (121) des valeurs de vitesses et de compressions.

(118)

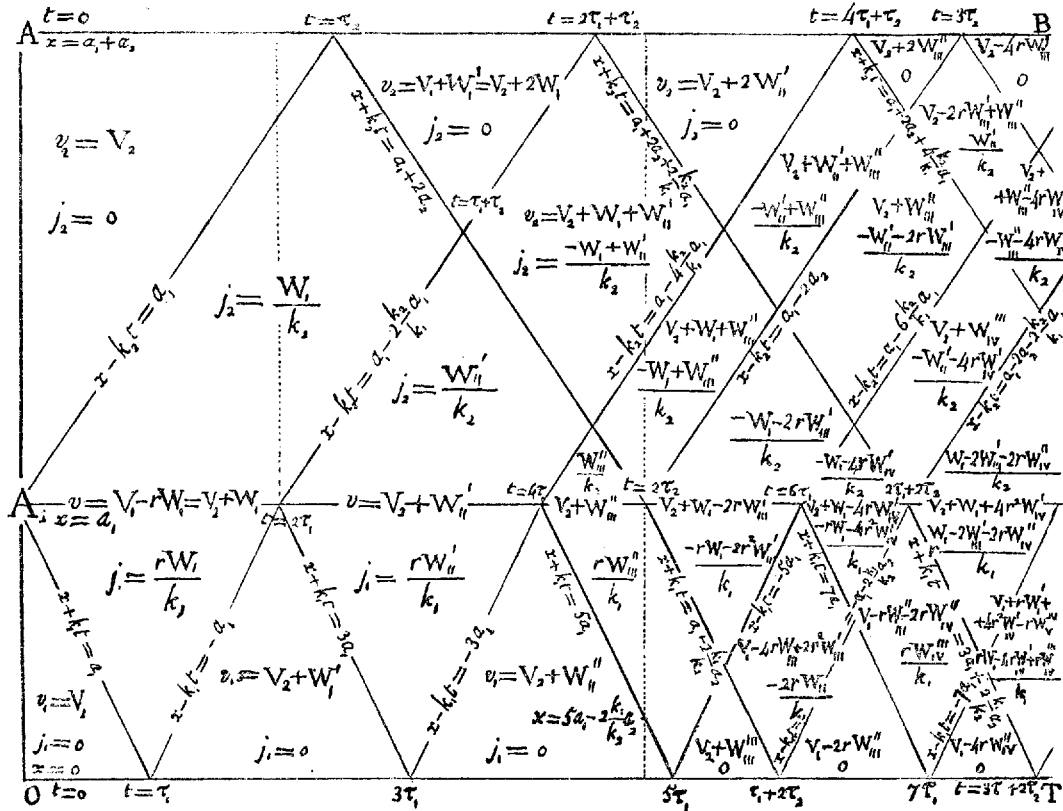
CAS $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$.

Dans ces diagrammes, on voit que pour les cases du haut et du bas, qui ne sont séparées que par l'horizontale tirée du point de jonction A_1 , les vitesses v_1, v_2 sont égales, ce qui doit être à cause de la contiguïté des deux barres; et j_1 ne diffère de j_2 que par le facteur $r \frac{k_2}{k_1}$, ce qui doit être aussi, d'après la deuxième condition définie (65) $E_1 \omega_1 \frac{du_1}{dx} = E_2 \omega_2 \frac{du_2}{dx}$. Cette double concordance offre un moyen de vérification.

On voit aussi que l'état des deux barres *supposées rester unies* ne redevient pas le même au bout du temps

$$t = 2\tau_1 + 2\tau_2,$$

(119)

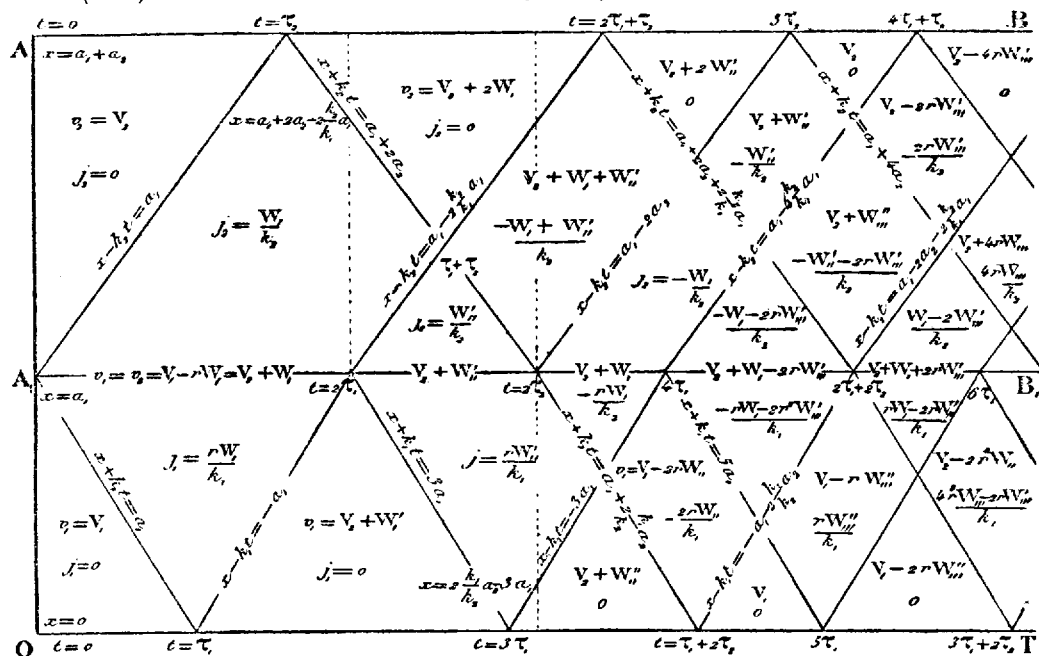
 CAS $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$.


et ne recommence pas périodiquement comme on a vu qu'elles faisaient quand elles sont de même section, à moins qu'on n'ait

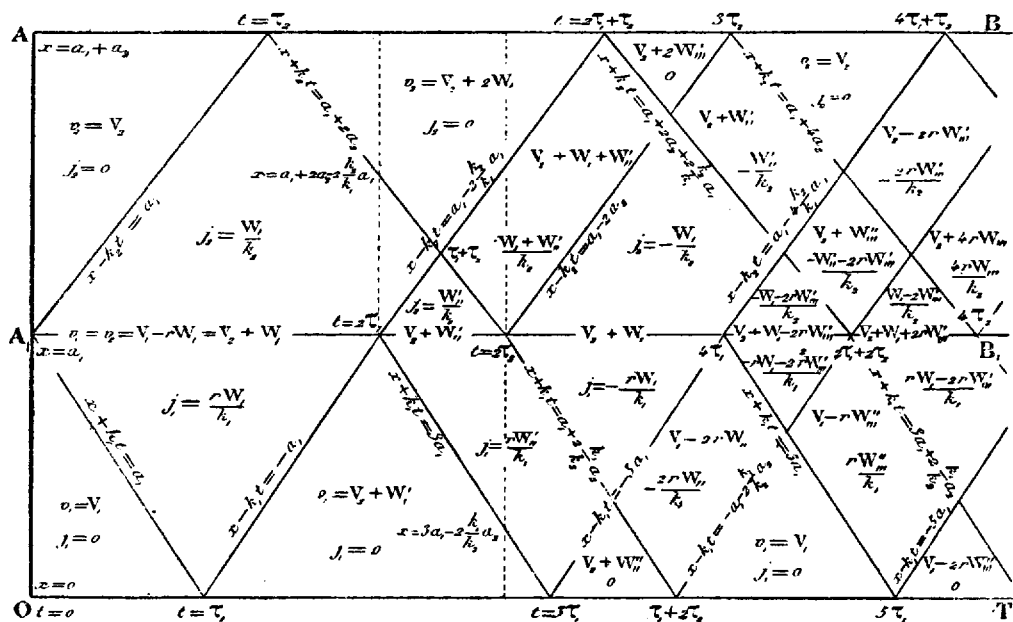
$$(122) \quad r = 1, \text{ c'est-à-dire } \frac{M_2}{a_2} k_2 = \frac{M_1}{a_1} k_1$$

ou égalité des masses des portions des deux barres ébranlées ou comprimées pendant un même temps. C'est seulement, en effet, lorsque cette condition est remplie, que tous les W avec accents supérieurs s'évanouissent, et que, pour $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, les vitesses v_1 , v_2 redeviennent uniformément V_1 et V_2 , avec des compressions j_1 , j_2 nulles.

(120)

CAS $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$.

(121)

CAS $2\tau_1 < 2\tau_2 < 4\tau_1$.

Ces diagrammes présentent la solution complète, jusqu'aux instants marqués, du problème du mouvement longitudinal d'une barre composée de deux parties prismatiques homogènes de sections et de matières différentes.

Les divers résultats de cette solution en termes finis satisfont, au reste, aux formules générales (69) de la solution en série transcendante.

Par exemple :

1° Pour l'instant $t = \tau_1$, où les deux diagrammes (118), (119) relatifs au cas général $2\tau_1 < \tau_2$ donnent, eu égard à $r = \frac{M_2 \tau_1}{M_1 \tau_2}$:

$$(123) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{du_1}{dt} = V_2 + W_1 = \frac{V_1 + rV_2}{r+1} = \frac{\frac{M_1}{\tau_1} V_1 + \frac{M_2}{\tau_2} V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}} \quad \text{de } x=0 \text{ à } x=a_1, \\ v_2 = \frac{du_2}{dt} = \text{la même chose de } x=a_1 \text{ à } x=a_1 + h_2 \tau_1 = a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2, \\ v_2 = \frac{du_2}{dt} = V_2 \quad \text{de } x=a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2 \text{ à } x=a_1 + a_2, \end{array} \right.$$

et où les formules transcendantes (69) donnent

$$(124) \quad \left(\frac{du_1}{dt} \right)_{t=\tau_1} = \sum m A X_1 \cos m \tau_1,$$

$$(125) \quad \left(\frac{du_2}{dt} \right)_{t=\tau_1} = \sum m A X_2 \cos m \tau_1,$$

si l'on opère de la même manière qu'on a fait pour déterminer le coefficient A par élimination ou disparition de tous les termes de chaque $\sum$ hors un, c'est-à-dire si l'on égale l'expression (124) de $\frac{du_1}{dt}$ à celle (123) de v_1 , et l'expression (125) de $\frac{du_2}{dt}$ successivement à la première et à la seconde de celles (123) de v_2 , et si l'on ajoute entre elles les trois équations qui en résultent, multipliées respectivement par

$$\frac{M_1}{a_1} X_1 dx, \quad \frac{M_2}{a_2} X_2 dx, \quad \frac{M_2}{a_2} X_2 dx,$$

et intégrées dans les limites de (123), on a une équation nouvelle qui, en égard à (71) ou à

$$\frac{M_1}{a_1} \int_0^{a_1} X_1 X'_1 dx + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1}^{a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2} X_2 X'_2 dx + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2}^{a_1 + a_2} X_2 X'_2 dx = 0,$$

faisant disparaître tous les termes des séries hors un de chaque, se réduit à

$$\begin{aligned} m \Lambda \cos m \tau_1 \cdot & \left(\frac{M_1}{a_1} \int_0^{a_1} X_1^2 dx + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1}^{a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2} X_2^2 dx \right) = \\ & - \frac{M_1}{a_1} \frac{\frac{M_1}{\tau_1} V_1 + \frac{M_2}{\tau_2} V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}} \int_0^{a_1} X_1 dx + \frac{M_2}{a_2} \frac{\frac{M_1}{\tau_1} V_1 + \frac{M_2}{\tau_2} V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}} \int_{a_1}^{a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2} X_2 dx \\ & + \frac{M_2}{a_2} \int_{a_1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2}^{a_1 + a_2} X_2 dx, \end{aligned}$$

et devient une identité, si l'on met pour Λ sa valeur (69) et si on effectue les intégrations.

2° On trouve la même identité pour

$$t = 2\tau_1 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= V_2 + W' = V_1 - \frac{2 \frac{M_2}{\tau_2}}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}} (V_1 - V_2) \quad \text{de } x = 0 \quad \text{à } x = a_1, \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{\frac{M_1}{\tau_1} V_1 + \frac{M_2}{\tau_2} V_2}{\frac{M_1}{\tau_1} + \frac{M_2}{\tau_2}} \quad \text{de } x = a_1 \quad \text{à } x = a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 = a_1 + 2 \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= V_2 \quad \text{de } x = a_1 + 2 \frac{\tau_1}{\tau_2} a_2 \quad \text{à } x = a_1 + a_2, \end{aligned} \right.$$

et généralement pour toutes les valeurs contemporaines, soit des vitesses v_1, v_2 , soit des compressions j_1, j_2 des diagrammes ci-dessus, comparées aux expressions transcendentes (69) particularisées en donnant à t les valeurs qui y répondent.

11. *Conséquences, en ce qui regarde le mouvement des deux barres après l'instant de leur choc, leur séparation, et les vitesses à l'instant où elle s'opère.* — Rappelons-nous les notations (59)

$$m_1 a_1 = M, \quad m_2 a_2 = M_2, \quad r = \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}.$$

On voit tout d'abord, par les parties de gauche des quatre diagrammes (118) à (121), qu'à dater de l'instant $t = 0$ où deux barres de longueurs a_1, a_2 se heurtent sans compression initiale, l'ébranlement se propage graduellement dans chacune, en sorte que, de part et d'autre du point $x = a_1$ de leur jonction, deux portions $k_1 t, k_2 t$ de longueurs croissantes prennent une vitesse

$$(126) \quad v_1 = v_2 = V_2 + W_1 = \frac{V_1 + r V_2}{1 + r} = \frac{m_1 k_1 V_1 + m_2 k_2 V_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2},$$

au lieu des vitesses V_1, V_2 qu'elles possédaient, et en même temps des compressions

$$(127) \quad \begin{cases} j_1 = \frac{r W_1}{k_1} = \frac{r(V_1 - V_2)}{(1 + r) k_1} = \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} \frac{V_1 - V_2}{k_1}, \\ j_2 = \frac{W_1}{k_2} = \frac{V_1 - V_2}{(1 + r) k_2} = \frac{m_1 k_1}{m_1 k_1 + m_2 k_2} \frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{cases}$$

Mais, après le temps

$$\tau_1 = \frac{a_1}{k_1} \quad \text{qui est} \quad < \frac{a_2}{k_2},$$

la portion relative à la deuxième barre continue seule de croître. Celle de la première, qui en a embrassé la totalité, décroît de k_1 par unité de temps à partir de l'extrémité libre $x = 0$, et est remplacée par une portion ayant

$$(128) \quad \begin{cases} \text{Une vitesse} & v_1 = V_2 + W_1' = V_1 - 2r W_1 \\ & = V_1 - 2r \frac{V_1 - V_2}{1 + r} = V_1 - \frac{2 m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} (V_1 - V_2), \\ \text{Une compression} & j_1 = 0, \end{cases}$$

en sorte qu'au bout d'un second temps τ_1 , ou pour

$$t = 2\tau_1 = 2 \frac{a_1}{k_1},$$

toute la barre a_1 se trouve avoir cette vitesse (128) sans aucune compression, tandis que la seconde possède encore à partir de leur point de contact

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Une vitesse } v_2 = \frac{V_1 + r V_2}{1 + r} \text{ et une compression } j_2 = \frac{V_1 - V_2}{(1 + r) k_2}, \\ \text{sur une longueur } \left\{ \begin{array}{ll} 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 & \text{si } 2 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}, \\ 2 k_2 \left(\frac{a_2}{k_2} - \frac{a_1}{k_1} \right) & \text{si } \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < 2 \frac{a_1}{k_1}; \end{array} \right. \\ \text{et, sur le reste, une vitesse } V_2 \text{ dans le premier cas, et } V_1 \text{ dans le second,} \\ \text{avec } j_2 = 0. \end{array} \right.$$

Pour déterminer ce que deviennent les barres après cet instant

$$(130) \quad t = 2\tau_1 = 2 \frac{a_1}{k_1},$$

où le son a parcouru aller et retour celle des deux barres qui exige pour cela le moins de temps et qui est supposée a_1 , il faut distinguer trois cas :

$$r = 1, \quad r > 1, \quad r < 1.$$

1° Cas $r = 1$ ou $m_2 k_2 = m_1 k_1$. — Alors, comme toutes les quantités désignées par (95) W avec un ou plusieurs accents *supérieurs* s'évanouissent, on a

A l'instant $t = 2\tau_1$, $v_1 = V_2$ dans toute la première barre;

ensuite, à l'endroit du choc ou pour $x = a_1$,

$$\text{De } t = 2\tau_1 \text{ à } t = 2\tau_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = V_2, j_1 = 0 \text{ dans toute la première barre,} \\ v_2 = V_2, j_2 = 0 \text{ sur une portion contiguë de la deuxième barre.} \end{array} \right.$$

Les deux barres, pendant ce laps de temps $2\tau_2 - 2\tau_1$, marchent juxtaposées sans aucune action l'une sur l'autre.

A l'instant $t = 2\tau_2$ où le son a parcouru aller et retour la deuxième barre, on a dans les deux, au point de jonction $x = a_1$,

$$v_1 = V_2, \quad v_2 = V_2 + W, = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r}.$$

La seconde vitesse excède la première et tend à séparer les deux barres. Et si cependant elles continuaient à être unies, on aurait après cet instant

$$v_1 = v_2 = V_2 + W, \\ j_1 = -\frac{rW}{k_1}, \quad j_2 = -\frac{W}{k_2}.$$

Ces compressions sont négatives, et par conséquent impossibles à un pareil endroit.

Les deux barres se sépareront et s'éloigneront donc l'une de l'autre à partir de l'instant $t = 2\tau_2$.

Ainsi, dans ce premier cas,

$$r = 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 = m_1 k_1,$$

ou lorsque la masse comprimée ou ébranlée pendant un temps quelconque est la même dans les deux barres de sections et de matières différentes, elles se comportent absolument comme on a vu que faisaient deux barres de même matière et d'égale section.

Et l'on a pour les vitesses de translation à l'instant $t = 2\tau_2$ de la séparation, et même dès l'instant $t = 2\tau_1$,

$$(131) \quad U_1 = V_2, \quad U_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_2} (V_1 - V_2).$$

2° Cas $r > 1$ ou $m_2 k_2 > m_1 k_1$. — Alors les quantités (95) W avec un nombre impair d'accents supérieurs sont négatives. Les deux barres ne peuvent plus rester unies passé l'instant

$$t = 2\tau_1 = 2 \frac{a_1}{k_1};$$

car ensuite elles auraient, à l'endroit de leur jonction, des compres-

sions négatives

$$j_1 = r \frac{W'_1}{k_1}, \quad j_2 = \frac{W'_2}{k_2},$$

ce qui est impossible. Elles se sépareront donc alors.

Et l'on aura pour la vitesse de toute la première barre ainsi séparée

$$(132) \quad U_1 = V_2 - \frac{r-1}{r+1} (V_1 - V_2) = V_1 - \frac{2r}{1+r} (V_1 - V_2).$$

Mettant pour r sa valeur $\frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$, et déduisant de U_1 la vitesse U_2 du centre de gravité de la deuxième barre par le théorème

$$M_1 U_1 + M_2 U_2 = M_1 V_1 + M_2 V_2,$$

on a les expressions suivantes :

$$(133) \quad \begin{cases} U_1 = V_2 - 2 \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} (V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + 2 \frac{M_1}{M_2} \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} (V_1 - V_2). \end{cases}$$

La seconde pouvait être obtenue directement au moyen des vitesses des deux parties de la seconde barre à l'instant $t = 2\tau_1$ de la séparation, car on a, ainsi, les deux expressions :

$$\text{Si } 2 \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2},$$

$$U_2 = \frac{1}{a_1} \left[2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \left(V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r} \right) + \left(a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \right) V_2 \right];$$

$$\text{Si } \frac{a_2}{k_2} < 2 \frac{a_1}{k_1},$$

$$U_2 = \frac{1}{a_2} \left[\left(2a_2 - 2 \frac{k_2}{k_1} a_1 \right) \left(V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r} \right) + \left(2 \frac{k_2}{k_1} a_1 - a_2 \right) \left(V_2 + 2 \frac{V_1 - V_2}{1+r} \right) \right],$$

se réduisant l'une comme l'autre à

$$(134) \quad U_2 = V_2 + 2 \frac{a_1 k_2}{a_2 k_1} \frac{V_1 - V_2}{1+r},$$

qui est la même chose que la seconde (133).

On reconnaît tout d'abord que ces expressions (133) de U_1 , U_2 ne sauraient être générales ou s'appliquer à tous les rapports possibles r de $m_2 k_2$ à $m_1 k_1$. En effet, en les prenant sous les formes (132), (134), on verra que la seconde est plus petite que la première, quand

$$r < 1 - 2 \frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}, \quad \text{ou} \quad r < 1 - 2 \frac{\tau_1}{\tau_2};$$

en sorte que la barre qui va derrière marchera plus vite que le centre de gravité de celle qui va devant; et, en supposant même qu'elles se fussent séparées, elles se rejoindraient. Mais il suffit, comme on va voir, que r soit < 1 pour que les expressions (133) ne soient plus celles des vitesses après le choc.

3° Cas $r < 1$ ou $m_2 k_2 < m_1 k_1$. — Alors tous les W sont positifs, en sorte que, d'après les quatre diagrammes (118) à (121), les j_1 et j_2 sont positifs de part et d'autre du point de contact $x = a_1$, et les barres, continuant à se presser l'une l'autre, restent unies jusqu'à l'instant

$$t = 2\tau_2 = 2 \frac{a_2}{k_2}.$$

Mais, si leur union continuait passé ce dernier instant, on voit que les j_1, j_2 seraient négatifs.

Elles se sépareront donc à cet instant $t = 2\tau_1$.

Nous pouvons à cet égard généraliser, par les formules (112) et (114) relatives à des rapports indéfinis de grandeur de τ_2 à τ_1 , les résultats des quatre diagrammes.

Soit n la partie entière du nombre de fois que $\tau_2 = \frac{a_2}{k_2}$ contient $\tau_1 = \frac{a_1}{k_1}$, en sorte que

$$(135) \quad n\tau_1 < \tau_2 < (n+1)\tau_1,$$

ce qu'on peut représenter au moyen de l'un ou de l'autre des deux premiers diagrammes (118) et (119) en y écrivant, sur les horizontales partant de A_1 et de O , et sur quatre des lignes inclinées qu'elles compren-

nent

(136)

$t = 2n\tau_1$ et $(2n+1)\tau_1$; $x+k_1t = (2n+1)a_1$ et $(2n+3)a_1$; $x-k_1t = -(2n-1)a_1$ et $-(2n+1)a_1$;
au lieu de

$$\begin{array}{llll} t = 6\tau_1, & 7\tau_1; & x+k_1t = 7a_1, & 9a_1; \quad x-k_1t = -5a_1, -7a_1 \text{ dans (118);} \\ & 4\tau_1, & 5\tau_1; & 5a_1, \quad 7a_1; \quad -3a_1, -5a_1 \text{ dans (119).} \end{array}$$

Dans la case triangulaire située à droite et au-dessous du point $t = 2\tau_2$, et qui est comprise entre l'horizontale de A_1 et les lignes inclinées $x+k_1t = a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2$ et $x-k_1t = -(2n+1)a_1$, nous aurons d'après les formules (114) et (112)

$$2k_1f'_1(x+k_1t) = 2k_1f'_1\left\{\begin{array}{l} (2n+3)a_1 \\ a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2 \end{array}\right\} = V_2 + 4rW_n + W_{(n+1)}^{(n+1)},$$

$$2k_1F'_1(x+k_1t) = 2k_1F'_1\left\{\begin{array}{l} -(2n+1)a_1 \\ -(2n-1)a_1 \end{array}\right\} = -V_2 - W_{(n)}^{(n)}.$$

D'où, pour la compression j_1 ,

$$2k_1j_1 = -2k_1f'_1 - 2k_1F'_1 = -4rW_n + W_{(n+1)}^{(n)}(r-1+r+1),$$

ou

$$(137) \quad j_1 = -\frac{r(V_1-V_2)(1-r)}{(1+r)^2k_1} \left[\frac{2}{1-r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n-1} \right].$$

Et l'on trouverait la même chose, comme cela doit être sauf le facteur $r\frac{k_1}{k_2}$, pour j_2 dans la case trapèze à droite et au-dessus du point $t = 2\tau_2$, en tirant, pour l'obtenir, de la formule (97) et de la formule (115), les valeurs de

$$2k_2f'_2\left\{\begin{array}{l} a_1 + 2a_2 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{array}\right\}, \quad 2k_2F'_2\left\{\begin{array}{l} a_1 - (2n+2)\frac{k_2}{k_1}a_1 \\ a_1 - 2a_2 \end{array}\right\}.$$

Or le binôme entre crochets de cette expression (137) de j_1 est positif, puisque r est positif et < 1 . Il s'ensuit que si les barres restaient unies après l'instant $t = 2\tau_2$, leurs compressions, à l'endroit où elles se joignent, seraient négatives.

Donc, quel que soit n ou $\frac{\tau_1}{\tau_2} > 1$, quand les deux barres ne se sont pas séparées à l'instant $t = 2\tau_1$, c'est-à-dire quand $r < 1$ ou

$$m_2 k_2 < m_1 k_1,$$

elles se sépareront à l'instant

$$t = 2\tau_2 = 2 \frac{a_2}{k_2}.$$

La séparation a lieu lorsque l'ébranlement ou le son a parcouru aller et retour celle des deux barres où la portion ébranlée pendant chaque instant a le moins de masse.

Si c'est a_1 , c'est-à-dire celle des deux dont le son met le moins de temps à parcourir toute la longueur, les vitesses de translation au moment de la séparation sont celles (133) du cas $r > 1$. Si c'est l'autre, on a des vitesses différentes, que nous allons pouvoir calculer pour toute valeur de n au moyen des formules déjà employées (112) et (114) applicables à des rapports indéfinis de grandeur de τ_2 à τ_1 .

En effet, la supposition (135) $n\tau_1 < \tau_2 < (n+1)\tau_1$ se subdivise en deux autres plus particulières :

$$(138) \quad \begin{cases} 1^{\text{re}} & (2n+1)\tau_1 < 2\tau_2 < (2n+2)\tau_1, \\ 2^{\text{e}} & 2n\tau_1 < 2\tau_2 < (2n+1)\tau_1, \end{cases}$$

figurées respectivement par les diagrammes (118) et (119) avec les substitutions (136). Or, dans la première, la barre a_1 se compose, à l'instant $t = 2\tau_2$:

1° D'une partie inférieure, de longueur

$$x = k_1 t - (2n+1)a_1 = 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 - (2n+1)a_1,$$

dont la ligne figurative (ponctuée) est comprise, au diagramme (118), dans une case triangulaire pour laquelle on a

$$\begin{aligned} 2k_1 f'_1(x + k_1 t) &= 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{array}{l} a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ (2n+1)a_1 \end{array} \right\} = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)}, \\ -2k_1 F'_1(x - k_1 t) &= -2k_1 F'_1 \left\{ \begin{array}{l} -a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ -(2n+1)a_1 \end{array} \right\} = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)}, \end{aligned}$$

d'où

$$(139) \quad v_1 = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)} = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (V_1 - V_2);$$

2° D'une partie supérieure, de longueur

$$a_1 - \left[2 \frac{k_1}{k_2} a_2 - (2n+1)a_1 \right] = (2n+2)a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2$$

dont la ligne ponctuée figurative est comprise, toujours au diagramme (118), dans une case trapèze pour laquelle on a

$$2k_1 f'_1(x+k, t) = 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} a_1 + 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \\ (2n+1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n+1)}^{(n+1)},$$

$$- 2k_1 F'_1(x-k, t) = - 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2n+1)a_1 \\ -(2n-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n)}^{(n)},$$

d'où

$$(140) \quad v_1 = V_2 + \frac{1}{2} [W_{(n+1)}^{(n+1)} + W_{(n)}^{(n)}] = V_2 + W_{(n+1)}^{(n)} \frac{1-r+1+r}{2} = V_2 + \frac{(1-r)^n (V_1 - V_2)}{(1+r)^{n+1}}.$$

Dans la deuxième supposition (138), $2n\tau_1 < 2\tau_2 < (2n+1)\tau_1$, on voit par le diagramme (119) que la barre a_1 se divise, à l'instant $t = 2\tau_2$:

1° En une partie inférieure, de longueur

$$- 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 + (2n+1)a_1$$

comprise dans une case triangulaire pour laquelle on a

$$2k_1 f'_1 \left\{ \begin{matrix} (2n+1)a_1 \\ (2n-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n)}^{(n)},$$

$$- 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{matrix} -(2n+1)a_1 \\ -(2n-1)a_1 \end{matrix} \right\} = V_2 + W_{(n)}^{(n)},$$

$$(141) \quad v_1 = V_2 + W_{(n)}^{(n)} = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (V_1 - V_2);$$

2° En une partie supérieure, de longueur

$$2 \frac{k_1}{k_2} a_2 - 2na_1$$

comprise dans une case trapèze pour laquelle on trouve comme (140)

$$(142) \quad v_1 = V_2 + \frac{(1-r)^n (V_1 - V_2)}{(1+r)^{n+1}}.$$

Multipliant la longueur de chaque partie de la barre a_1 par la vitesse (139) ou (140), (141) ou (142) qui y répond, et divisant par la longueur totale a_1 , l'on obtient, dans l'une comme dans l'autre des deux suppositions (138), la même valeur de la vitesse du centre de gravité de la barre a_1 ; ce qui vient de ce que la barre a_2 se compose de parties en même nombre $n + 1$ ayant leurs longueurs nécessairement exprimées de même ainsi que les vitesses qui y répondent. On a ainsi l'expression suivante de U_1 . Celle qui est écrite à la suite pour la vitesse U_2 du centre de gravité de la barre a_2 n'est que ce qui résulte du principe de la conservation de la quantité totale du mouvement.

$$(143) \quad \begin{cases} U_1 = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left(1 - 2r \frac{\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n}{1+r} \right) (V_1 - V_2) = \\ \quad = V_2 + \left(\frac{m_1 k_1 - m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} \right)^n \left[1 - \frac{2 m_2 k_2}{m_1 k_2 + m_2 k_2} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - n \right) \right] (V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_2} (V_1 - U_1). \end{cases}$$

D'après la définition (135) de n , le binôme $\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n$, ou $\frac{\tau_2}{\tau_1} - n$, qui entre dans l'expression de U_1 , est toujours positif et < 1 ; et comme $\frac{2r}{1+r}$ est aussi < 1 , U_1 est toujours égal à V_2 plus une quantité positive qui, pour des valeurs déterminées de r et de n , est à son maximum quand le même binôme est nul, ou quand le temps de parcours du son d'un bout à l'autre de a_2 est un multiple exact de son parcours d'un bout à l'autre de a_1 . Alors on a simplement

$$(144) \quad \begin{cases} U_1 = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_2} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] (V_1 - V_2). \end{cases}$$

Lorsqu'on a

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2},$$

il faut, dans les formules (133) des vitesses après le choc, du cas $r > 1$, remplacer k_1, k_2 , par a_1, a_2 , et, dans celles (143) du cas $r < 1$, faire $n = 1, \frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} = 1, r = \frac{M_2}{M_1}$. On tire ainsi des unes comme des autres

$$(145) \quad U_1 = V_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2), \quad U_2 = V_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2);$$

et les compressions résidues sont nulles, comme on peut voir par le troisième ou le quatrième diagramme (120) ou (121) du n° 10, en faisant confondre, sur la ligne $x = a_1$, les points $t = 2\tau_1$ et $t = 2\tau_2$.

Ce sont les formules de la théorie ordinaire, qu'on trouve exposée dans tous les livres traitant du choc des corps parfaitement élastiques.

Ces formules connues (145), comme on voit, ne sont vraies que lorsque le son met le même temps à parcourir les deux barres dans toute leur longueur; et le choc ne cesse qu'après deux fois ce temps, quand les deux barres, graduellement comprimées d'un bout à l'autre à partir du point de rencontre pendant le premier temps, ont perdu leur compression pendant un second temps qui lui est égal, en commençant par leurs extrémités libres.

Dans tout autre cas il faut recourir aux formules nouvelles (133), (143) applicables pour $r > 1, r < 1$, et comprenant celles (131) relatives à $r = 1$.

12. *Preuve que les deux barres, après s'être séparées soit à l'instant $t = 2\tau_1$, soit à l'instant $t = 2\tau_2$, ne se rejoindront pas, ou que la compression qu'elles conservent ne déterminera pas, par détente ou par vibrations, un contre-coup ou une nouvelle rencontre de leurs extrémités.* — Déterminons, pour nous en assurer, ce que deviendront les deux barres après leur séparation, en les traitant comme barres isolées, au moyen de diagrammes tels que (23) ou (24) du n° 3.

Dans le cas $r > 1$ qui est celui de la séparation à l'instant $t = 2\tau_1$, la barre a_1 possède d'un bout à l'autre une vitesse (128)

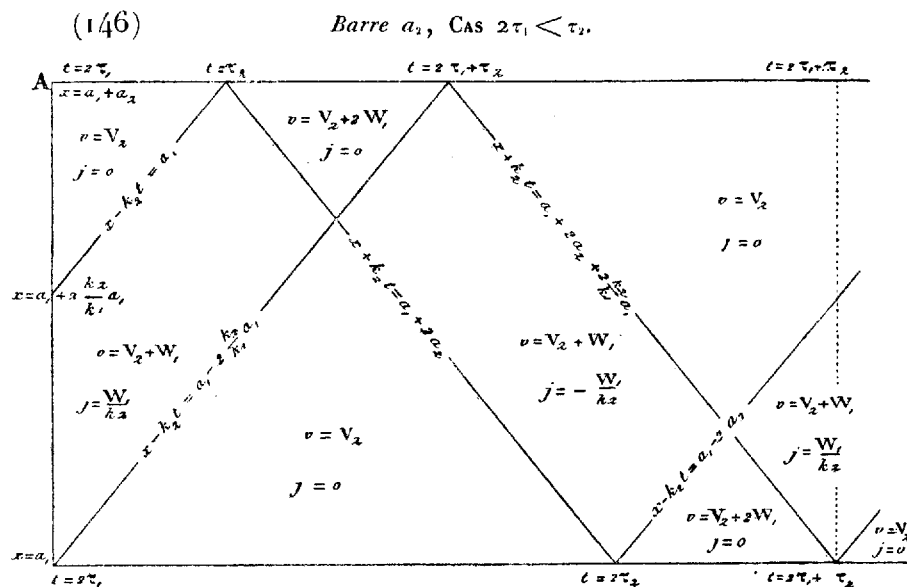
$$(146) \quad v_1 = V_2 + W,$$

qui ne changera plus puisque la barre est sans compression. Nous n'avons donc à chercher que ce que deviendra la barre a_2 , en mettant, dans le diagramme (23),

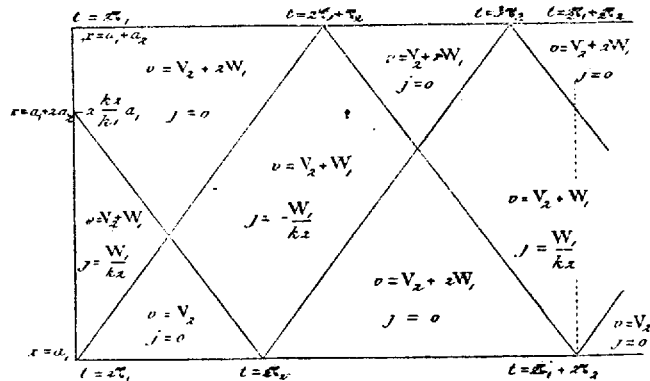
A la place des vitesses et compressions initiales $V_1, J_1; V_2, J_2,$

Celles de ses deux parties..... $V_2 + W, \frac{W}{k_2}; V_2, 0.$

Ce diagramme se réduira à l'un des deux suivants, ayant moins de lignes d'ébranlement et de cases, ainsi que ceux (41), (42) que nous en avons déjà déduits, vu que plusieurs cases contiguës offrant les mêmes vitesses et les mêmes compressions se réunissent en une seule. Cela vient, comme on a dit au n° 6, de ce que les ébranlements suscités se continuent, sans qu'il en surgisse de nouveaux, partant, dans des sens contraires, des points séparatifs des portions où les vitesses et les compressions sont différentes; en sorte que les lignes inclinées de ces deux diagrammes sont la reproduction de celles des parties supérieures, ou relatives à a_2 , des diagrammes (118) à (120) du numéro précédent, moins celles qui proviennent des *réfractions*, c'est-à-dire des passages, de la barre a_1 à la barre a_2 , des ébranlements de réflexion ultérieure dans celle-là, qui n'est plus jointe à celle-ci.



(147)

Barre a_2 , CAS $\tau_1 < \tau_2 < 2\tau_1$.

On peut y voir, pour le point $x = a_1$ de la jonction primitive :

Que la vitesse (128) $V_2 + W_1$, conservée par l'autre barre, a_1 , est inférieure à celles que possède la seconde, savoir

$$\begin{aligned} V_1 & \quad \text{entre } t = 2\tau_1 \quad \text{et} \quad t = 2\tau_2. \\ V_2 + 2W_1 & \quad \text{entre } t = 2\tau_2 \quad \text{et} \quad t = 2\tau_1 + 2\tau_2; \end{aligned}$$

et que, passé l'instant $t = 2\tau_1 + 2\tau_2$, les mêmes vitesses se reproduisent périodiquement dans la barre isolée a_2 .

Elles s'éloignera donc de plus en plus de la barre a_1 , comme on a vu, au n° 6, que faisait la seconde des deux barres de même grosseur et de même matière, avec cette différence, que celles dont nous nous occupons ici s'éloignent l'une de l'autre dès l'instant $t = 2\tau_1$, au lieu de marcher contiguës quoique sans action mutuelle pendant un temps $2\tau_2 - 2\tau_1$, ainsi qu'elles feraient encore avec des grosseurs et des matières différentes si l'on avait $r = 1$.

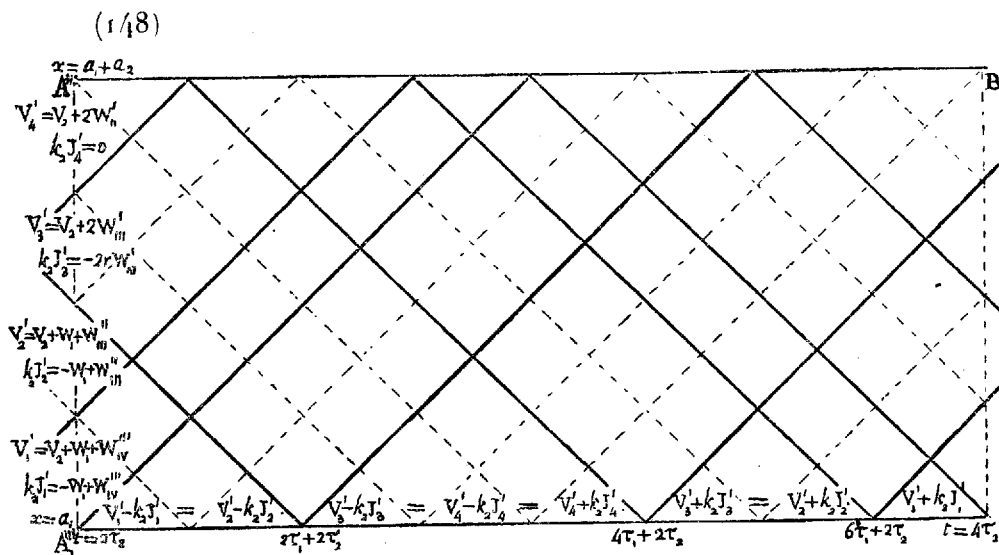
Examinons maintenant, quand $r < 1$, ce qui se passe après la séparation, qui a lieu dans ce cas à l'instant $t = 2\tau_2$.

La barre a_1 se compose alors de deux parties ayant des vitesses différentes, et dont une n'a pas de compression; et ses états ultérieurs peuvent être déterminés au moyen du diagramme (23). La barre a_2 , qui ne se compose aussi que de deux parties dans le cas des deux derniers diagrammes (120), (121) du numéro précédent, pour lesquels on a $\tau_2 < 2\tau_1$, en a trois dans le cas $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$ du (119), et quatre dans le cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ du (118).

Mais il n'est pas nécessaire de déterminer leurs états ultérieurs com-

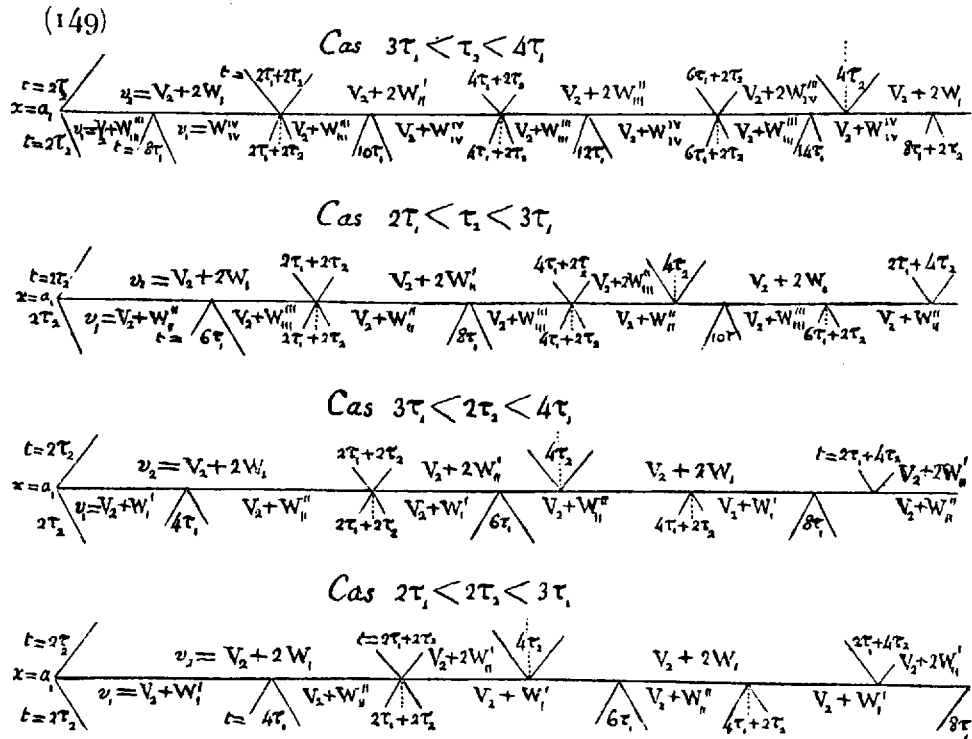
plets, ou de construire, pour ces barres en totalité, les diagrammes tels que celui (23) à deux parties, celui (24) à trois, et celui qu'on dresserait de même avec quatre. Il suffit d'avoir le haut des diagrammes relatifs à a_1 et le bas des diagrammes qui seront relatifs à a_2 , pour connaître les vitesses successives, dans chacune des deux barres, des points primitivement jointifs $x = a_1$, ce qui est la seule chose essentielle à connaître pour être certain que ces points ne se heurteront plus.

D'abord, il n'y aura aucune nécessité de calculer les abscisses des points où les lignes tant supérieure qu'inférieure de ces diagrammes sont rencontrées par les lignes obliques d'ébranlement conservées. Ces abscisses ne diffèrent en rien, d'après l'observation que nous avons faite tout à l'heure ainsi qu'au n° 6, de celles qui sont cotées sur l'horizontale de A, aux diagrammes (118) à (121) à partir du point $t = 2\tau_2$; et l'on doit supprimer, pour chacune des deux barres, les abscisses des points d'intersection des lignes d'ébranlement réfléchies dans l'autre barre depuis l'instant $t = 2\tau_2$. Il ne reste ainsi à calculer, pour la barre a_2 , dans le cas par exemple $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$ où elle est composée de quatre parties à cet instant, que les quatre vitesses données par les binômes $V' \pm k_2 J'$ qu'on lit au bas du diagramme suivant (148), où V'_1 et J'_1 , V'_2 et J'_2 , V'_3 et J'_3 , V'_4 et J'_4 , désignent les vitesses et compressions de ces parties en commençant par le bas.



Les binômes que nous avons marqués comme égaux seront en effet trouvés tels, d'après les valeurs des V' et des J' indiquées à gauche, ce qui réduit à quatre cases triangulaires inférieures un diagramme qui, complet, ou avec des vitesses et des compressions initiales quelconques, en eût offert huit.

Nous obtiendrons ainsi les valeurs suivantes, au point de jonction primitif $x = a_1$, des vitesses dans les deux barres se mouvant isolément après la séparation à l'instant $t = 2\tau_2$. On peut voir que les distances horizontales ou les temps cotés y sont bien les mêmes qu'aux quatre diagrammes (118) à (121).



Sur chacune de ces quatre lignes, les cotes supérieures de temps et de vitesses sont relatives à la barre a_2 , les cotes inférieures le sont à la barre a_1 . Les vitesses redeviennent les mêmes :

Pour la barre a_2 , après $t = 4\tau_2, 6\tau_2, 8\tau_2, \dots$,

Pour la barre a_1 , après $t = 2\tau_1 + 2\tau_2, 4\tau_1 + 2\tau_2, 6\tau_1 + 2\tau_2, \dots$

En multipliant les vitesses successives de la barre a_2 par les temps (différences des valeurs consécutives de t) pendant lesquels elles ont régné, et en ajoutant les produits, on a pour une époque quelconque le chemin qu'elle a fait, au point inférieur primitivement contigu à la barre a_1 , depuis l'époque $t = 2\tau_2$. En retranchant de cette somme une somme de produits analogues, faite de même pour le point supérieur de la barre a_1 , et arrêtée à la même époque, on obtient l'avance prise par la barre a_2 , ou la distance à laquelle doivent se trouver l'un de l'autre leurs points primitivement en contact.

Si, à toutes les époques cotées sur les lignes horizontales, les distances ou *avances* ainsi calculées sont positives pour les deux rapports extrêmes correspondants de τ_2 à τ_1 : par exemple, dans le cas $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$, en faisant successivement $\tau_2 = 3\tau_1$ et $\tau_2 = 4\tau_1$, on sera certain qu'elles sont positives pour tous les rapports de τ_2 à τ_1 compris entre les limites, telles que 3 et 4, relatives à chaque cas examiné.

Nous en avons fait le calcul pour les quatre cas mentionnés, jusques après plusieurs périodes de retour des mêmes vitesses; et nous avons constamment trouvé, pour la distance ou l'avance, des produits de $W_{(t)}\tau_1$ par des polynômes en r , qui restent positifs quand on donne à r des valeurs quelconques > 0 et < 1 , limites actuelles du rapport que r représente.

Par exemple :

1° Cas. $3\tau_1 < \tau_2 < 4\tau_1$; pour $t = 14\tau_1$, les cheminements des extrémités primitivement jointives de la première et de la seconde barre auront été respectivement

$$(14\tau_1 - 2\tau_2) V_2 + (-80\tau_1 + 20\tau_2) W''' + (-36\tau_1 + 18\tau_2) W_{IV}''$$

et

$$(14\tau_1 - 2\tau_2) V_2 + (4\tau_1 + 4\tau_2) W' + (-8\tau_1 - 4\tau_2) W'' + (12\tau_1 + 4\tau_2) W''' + (-64\tau_1 + 16\tau_2) W_{IV}''.$$

L'excès du second sur le premier est :

Si $\tau_2 = 3\tau_1$,

$$\tau_1(16W' - 20W'' + 24W''' - 16W_{IV}'' + 20W''' - 18W_{IV}''') = W_{IV}\tau_1(2r^4 + 36r^3 - 56r^2 + 108r + 38);$$

Si $\tau_2 = 4\tau_1$,

$$\tau_1(20W_1 - 24W_1' + 28W_1'' - 36W_1''') = W_{IV}\tau_1(-36r^4 + 168r^3 - 208r^2 + 190r + 36).$$

Le premier des deux quintinômes en r entre parenthèses est évidemment positif pour toute valeur de $r > 0$ et < 1 ; le second l'est également, car l'ensemble des deux derniers termes, qui est 226 pour $r = 1$, excède toujours la valeur numérique du précédent $-208r^2$.

2° Cas. $2\tau_1 < \tau_2 < 3\tau_1$; pour $t = 4\tau_1 + 4\tau_2$ le même excès serait :

Si $\tau_2 = 2\tau_1$,

$$\tau_1(8W_1 - 8W_1' - 8W_1'') = 8W_{II}\tau_1(-r^2 + 2r + 1);$$

Si $\tau_2 = 3\tau_1$,

$$\tau_1(8W_1 - 8W_1' + 4W_1'' - 2W_1''' + 8W_1''') = 2W_{III}\tau_1(3r^3 - 9r^2 + 17r + 5),$$

tous deux positifs, r étant > 0 et < 1 .

Et de même pour les autres époques et les autres cas.

Or, malgré la non-concordance des périodes, si deux lignes brisées *périodiques*, ou qui ont des droites pour lignes moyennes en partant du même point, comme sont celles qui auraient pour abscisses les temps et pour ordonnées les distances parcourues par les points primitivement jointifs des deux barres, ne se rejoignent pas dans les premières périodes, elles s'éloignent et divergent nécessairement de plus en plus l'une de l'autre.

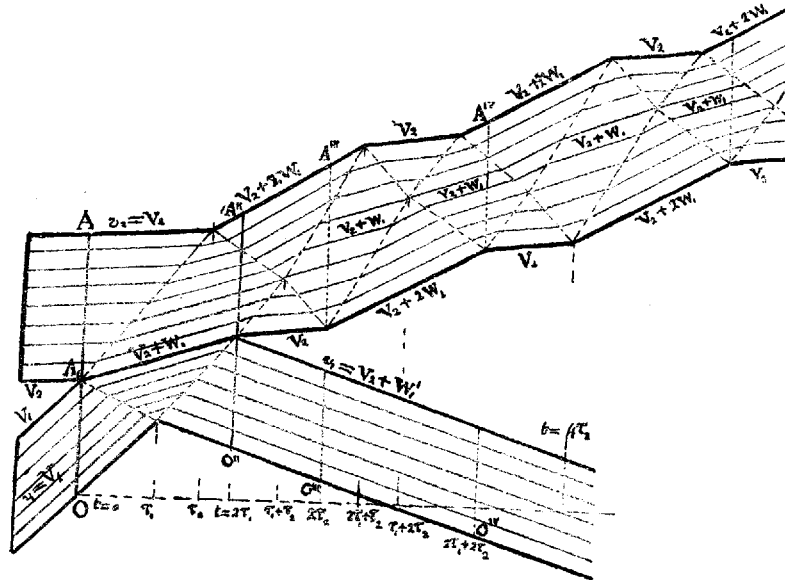
Nous pouvons donc nous tenir assurés que les barres, séparées à l'instant $t = 2\tau_2$ quand elles ne l'ont pas été à l'instant $t = 2\tau_1$, ne feront pas contre-coup en vertu de leurs vibrations, et que leur séparation est définitive, ou qu'elles conserveront, après leur choc, les vitesses de translation des formules (131), (133), (148), relatives aux trois cas $r = 1$, $r > 1$, $r < 1$, c'est-à-dire à

$$m_2 k_2 = \text{ou} > \text{ou} < m_1 k_1.$$

13. *Épures représentant les mouvements et les états successifs des deux barres depuis un instant précédant un peu leur choc jusqu'à un temps quelconque après qu'il est terminé.* — Ces épures, qui peignent

aux yeux tout ce qui se passe, donnent, comme celle (42) du n° 6 (relative à $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$, mais applicable plus généralement à $m_2 k_2 = m_1 k_1$ ou $r = 1$), les traces que laisseraient dans l'espace les points des deux barres transportées, perpendiculairement à leur longueur, avec une vitesse constante prise pour unité, se composant avec les vitesses longitudinales de ces points.

La première (150) est relative à la supposition $r = 3$ ou à un cas (150)



$r > 1$ (deuxième du n° 11),

car, avec les échelles prises pour les abscisses t et pour les ordonnées x , on a

$$V_1 = 1, \quad V_2 = \frac{1}{9}, \quad a_1 = 15^{\text{mm}}, \quad a_2 = 20^{\text{mm}}, \quad \tau_1 = 10^{\text{mm}}, \quad \tau_2 = 16^{\text{mm}};$$

d'où $k_1 = 1,5$, $k_2 = 1,25$;

ce qui exige que $\frac{m_2}{m_1} = 3 \frac{1,5}{1,25} = \frac{18}{5}$, ou que, par unité de longueur, la masse de la barre a_2 soit $3 \frac{3}{5}$ fois celle de la barre a_1 . On voit que les deux barres se séparent à l'instant $t = 2\tau_1$; que la première, a_1 ,

rebondit, on prend, au moment où elle achève de perdre sa compression, une vitesse finale

$$V_2 + W' = V_2 - \frac{r-1}{r+1} (V_1 - V_2) = -\frac{5}{12},$$

dont le signe négatif indique un sens opposé au sens suivant lequel elle a heurté la seconde barre. Celle-ci reprend périodiquement, savoir aux instants $t = 2\tau_1 + 2\tau_2, 2\tau_1 + 4\tau_2, \text{ etc.}$, l'état où elle était à l'instant $t = 2\tau_1$ de la séparation. Les proportions de leurs compressions étaient, pendant leur jonction, et de part et d'autre du point où elles se touchaient,

$$j_1 = r \frac{W'}{k_1} = \frac{r}{1+r} \frac{V_1 - V_2}{k_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1,5} = \frac{4}{9}, \quad j_2 = \frac{W'}{k_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1,25} = \frac{8}{45};$$

en sorte que les espacements verticaux entre les lignes parallèles primitivement distantes l'une de l'autre de $2^{\text{mm}},5$ étaient réduits à

$$2,5 \left(1 - \frac{4}{9}\right) = 1^{\text{mm}},39 \quad \text{et} \quad 2,5 \left(1 - \frac{8}{45}\right) = 2,055.$$

Comme la barre a_2 se dilate après la séparation, et possède, à l'instant $t = 2\tau_2$, sur les trois quarts de sa longueur, la compression négative

$$j_2 = -\frac{W'}{k_2} = -\frac{8}{45},$$

les espacements sont portés alors à $2,5 \left(1 + \frac{8}{45}\right) = 2^{\text{mm}},945$, mesurés toujours *verticalement* ou dans un sens parallèle à OA.

La deuxième épure (151) est relative au cas (troisième du n° 11)

$$r < 1;$$

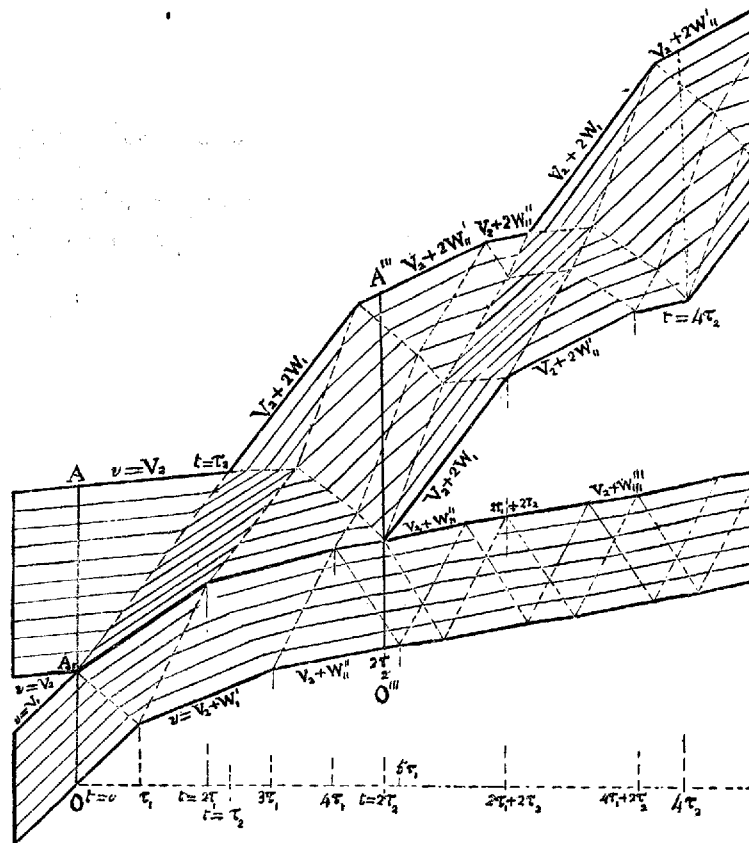
car elle suppose

$$r = \frac{1}{2}, \quad V_1 = 1, \quad V_2 = \frac{1}{10}, \quad a_1 = 15, \quad a_2 = 25, \quad \tau_1 = 8,5, \quad \tau_2 = 20;$$

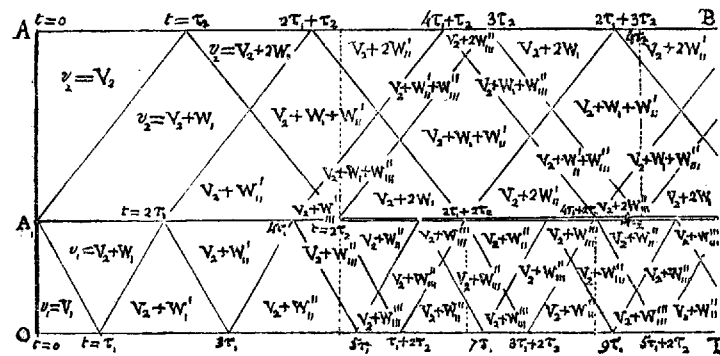
$$\text{d'où} \quad k_1 = \frac{30}{17}, \quad k_2 = \frac{5}{4};$$

$$\text{ce qui exige que} \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{17} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{17}.$$

(151)



(152)



La séparation se fait (n° 11) à l'instant $t = 2\tau_2$, après que la deuxième barre, fortement comprimée par le choc, surtout à l'instant $t = 2\tau_1$, dans une proportion

$$j_2 = \frac{W_1}{k_2} = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{V_1 - V_2}{k_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25},$$

s'est ensuite fortement dilatée, comme on le voit par sa longueur à cet instant $t = 2\tau_2$, où elle a (diagr. 119) deux compressions négatives,

$$j_2 = \frac{-W_1 + W''}{k_2} = -\frac{32}{75}, \quad j_2 = \frac{-W_1 + W'}{k_2} = -\frac{8}{25},$$

portant à 3,57 et à 3,3 les espacements des points primitivement distants de 2,5.

De pareilles dilatations et compressions ne sauraient être prises sans altérer la contexture des barres; mais il est entendu que les données sont choisies de manière à les exagérer pour les rendre très-apparentes.

A cette deuxième épure (151) on a joint le diagramme (152) des vitesses des deux barres avant et après l'instant $t = 2\tau_2$ de la séparation. Il est composé, quant aux premières vitesses, avec celui qui porte le chiffre (119) au n° 10 (car $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ est compris entre 2 et 3), et, quant aux secondes vitesses, comme le sont les diagrammes (23), (24), (40), (148) du mouvement d'une barre unique.

En faisant

$$r = \frac{1}{2}, \quad V_1 = 1, \quad V_2 = \frac{1}{10}$$

dans les expressions de v_1 et de v_2 , écrites à l'intérieur de ses diverses cases, on a les tangentes des angles que forment, avec l'axe des abscisses ou des temps, les diverses parties des lignes brisées qui représentent, dans les cases correspondantes de l'épure, les trajectoires de sept points de la barre a_1 et de onze points de la barre a_2 .

Les barres séparées reviennent périodiquement, savoir : a_1 quand $t = 2\tau_1 + 2\tau_2, 4\tau_1 + 2\tau_2, \dots$, et a_2 quand $t = 4\tau_2, 6\tau_2, \dots$, à l'état où elles étaient à l'instant $t = 2\tau_2$ de leur séparation.

Si τ_2 contenait un très-grand nombre de fois τ_1 , $r = \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$ étant encore supposé < 1 , le mouvement des diverses parties des barres, de la deuxième surtout, serait bien plus compliqué, et les trajectoires de leurs points approcheraient d'être des lignes courbes, déterminables par les formules en série trigonométrique du n° 8.

14. Condition générale de séparation des barres à un instant donné quelconque, exprimée en fonction des vitesses et des compressions de leurs extrémités jointives à cet instant. — Soient ces vitesses et ces proportions de compression, de part et d'autre du point de contact,

V'_2, J'_2 pour la barre a_2 , supposée toujours *aller devant*, ou être celle vers laquelle les vitesses positives sont dirigées;

V'_1, J'_1 pour la barre a_1 .

Nous pouvons établir de deux manières la condition pour qu'elles se séparent aussitôt après l'instant où ces vitesses et compressions sont possédées ou survenues.

Supposons en premier lieu, ce qui est permis, qu'elles se séparent pendant un temps *infinitement petit*. Le diagramme (23) du n° 3 relatif aux barres se mouvant isolément, ou le théorème qu'on en déduit, énoncé à la fin de ce même numéro, montre que leurs vitesses, au point de leur jonction, deviendront immédiatement après :

$$V'_2 - k_2 J'_2 \quad \text{pour } a_2,$$

$$V'_1 + k_1 J'_1 \quad \text{pour } a_1.$$

Cette soustraction $- k_2 J'_2$ et cette addition $+ k_1 J'_1$, faites à leurs vitesses positives, viennent, comme on a dit alors, de la *détente* des compressions J'_1, J'_2 . Si la nouvelle vitesse de a_2 excède la nouvelle vitesse de a_1 , elles s'éloignent alors l'une de l'autre.

La condition de séparation ou d'éloignement est donc

$$(153) \quad V'_2 - k_2 J'_2 - V'_1 + k_1 J'_1 > 0.$$

En second lieu, nous allons chercher à quelle condition, les barres

restant unies, leurs compressions à l'endroit de la jonction *deviendraient négatives*. Pour cela, dans la deuxième et dans la troisième formule (79), et dans les parties inférieures des formules (84) et (85) du n° 8, dressées pour des vitesses ψ et pour des compressions φ' initiales quelconques, nous ferons

$$\varphi'_1 \zeta = -J'_1, \quad \varphi'_2 \zeta = -J'_2, \quad \psi_1 \zeta = V'_1, \quad \psi_2 \zeta = V'_2.$$

Il en résultera les expressions suivantes, plus générales et aussi plus *scindées* quant aux limites que celles (92) et (93) qui ont été obtenues au n° 9 pour deux barres qui se heurtent avec des vitesses V_1, V_2 sans compression :

$$(154) \quad \begin{cases} 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right\} = -V'_1 - k_1 J'_1, \\ 2k_2 f'_2 \left\{ \begin{smallmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right\} = V'_2 - k_2 J'_2, \\ 2k_1 f'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} 2a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{r-1}{r+1} (-V'_1 - k_1 J'_1) + \frac{2r}{r+1} (V'_2 - k_2 J'_2), \\ 2k_2 F'_2 \left\{ \begin{smallmatrix} a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{2}{r+1} (-V'_1 - k_1 J'_1) - \frac{r-1}{r+1} (V'_2 - k_2 J'_2), \end{cases}$$

formules qu'on pourrait tirer aussi, directement et simplement, des conditions définies (73) à (76) du n° 8, et des deux formules promotrices (82) particularisées.

Or il en résultera, en supposant construit un diagramme tel que (89) relatif aux deux barres unies, que pour la barre a_1 , dans la case triangulaire qui est comprise tout entière au-dessous de A, B, d'une part entre le point de jonction A, ou la ligne extérieure montante $x - k_1 t = a_1$, et la ligne intérieure aussi montante $x - k_1 t = 0$, et d'autre part entre les lignes descendantes $x + k_1 t = a_1$ et $x + k_1 t = 2a_1$, on aurait

$$(155) \quad 2k_1 j_1 = -2k_1 f'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} 2a_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right\} - 2k_1 F'_1 \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{2r(V'_1 + k_1 J'_1) - 2r(V'_2 - k_2 J'_2)}{r+1}.$$

Et de même, pour la barre a_2 , dans la case trapèze comprise tout entière, d'une part entre les lignes descendantes $x + k_2 t = a_1$ (exté-

rieure) et $x + k_2 t = a_1 + a_2$, et d'autre part entre les lignes montantes $x - k_2 t = a_1$ et $x - k_2 t = a_1 - k_2 \tau_1 = a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1$, on aurait

$$(156) \quad 2k_2 j_2 = -2k_2 f_2' \left\{ \frac{a_1 + a_2}{a_1} \right\} - 2k_2 F_2' \left\{ a_1 - \frac{k_2}{k_1} a_1 \right\} = \frac{2(V_1' + k_1 J_1') - 2(V_2 - k_2 J_2')}{r + 1}.$$

Pour que ces expressions soient négatives il faut qu'on ait

$$V_2 - k_2 J_2' - V_1 - k_2 J_1' > 0,$$

ce qui redonne d'une autre manière l'inégalité (153).

On voit que la condition pour que les deux barres se séparent à un instant donné quelconque, exprimée en fonction des vitesses et des compressions qu'elles possèdent à cet instant et à leur point de jonction, est que la vitesse de celle qui va devant (ou vers laquelle et non pas à partir de laquelle les vitesses sont comptées positivement) diminuée du produit de sa compression par la vitesse du son qui s'y propage, soit plus grande que la vitesse de celle qui va derrière, augmentée du produit semblable qui lui est relatif.

Cette condition nécessaire et suffisante doit être substituée à celle $V_2' > V_1'$ que Cauchy semblait adopter *a priori*, et à celle $V_2' > V_1'$ avec $J_1' = 0$, $J_2' = 0$ que Poisson exigeait et qui, comme on voit, est surabondante.

Il était essentiel d'en faire la remarque, et d'observer qu'il faut combiner chaque vitesse en avant V_2' , V_1' , actuellement possédée, avec les vitesses tant en arrière qu'en avant $-k_2 J_2'$, $k_1 J_1'$ engendrées par les compressions J_2' , J_1' qui font détente.

Mais l'usage que nous avons fait des diagrammes (118) à (121) du n° 10 nous a dispensés de faire usage de cette condition de séparation (153), car ils donnent toutes calculées les compressions j_1 , j_2 qu'auraient fournies les formules (155), (156), et qui seraient prises, immédiatement après les instants considérés, par les deux barres si elles restaient unies, en sorte que nous n'avons eu, au n° 11, qu'à examiner simplement si elles étaient négatives.

On peut, au reste, comme moyen de vérification, reconnaître que

toutes ces compressions, après les divers instants où l'horizontale $x = a_1$ est rencontrée par les diverses lignes d'ébranlement, sont exactement celles qu'on déduirait de (155), (156).

13. Puissance vive (demi-force vive) perdue pour la translation ultérieure, dans le choc de deux barres parfaitement élastiques, de gros-seurs et de matières différentes. — Soient, en général, les vitesses des centres de gravité, après le choc, exprimées ainsi :

$$(157) \quad U_1 = V_1 - \alpha(V_1 - V_2), \quad U_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_2} \alpha(V_1 - V_2).$$

On trouvera pour la perte de puissance vive translatrice due au changement des vitesses primitives V_1, V_2 en ces vitesses de translation ultérieures U_1, U_2

$$(158) \quad \frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{M_2 V_2^2}{2} - \frac{M_1 U_1^2}{2} - \frac{M_2 U_2^2}{2} = M_1 \left[2\alpha - \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \alpha^2 \right] \frac{(V_1 - V_2)^2}{2}.$$

Si, pour se faire une idée des grandeurs diverses de cette perte, on la divise par celle qui aurait lieu si les deux barres, de masses M_1, M_2 , étaient deux corps dénués d'élasticité, et dont l'expression bien connue (55) est

$$(159) \quad \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{(V_1 - V_2)^2}{2},$$

on a pour la *perte proportionnelle*

$$(160) \quad \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \left[2\alpha - \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \alpha^2 \right] = \left(1 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} \right) \left[2\alpha - \left(1 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} \right) \alpha^2 \right].$$

Pour qu'elle ne soit pas négative ou nulle, il faut qu'on ait

$$(161) \quad \alpha < \frac{2M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{ou} \quad < \frac{2m_2 a_2}{m_1 a_1 + m_2 a_2},$$

ou que l'indéterminée α ait tout au plus la valeur qu'elle possède dans les formules (145) de la théorie ordinaire. Nous verrons que cette condition est toujours remplie.

1° Dans le cas

$$r = 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 > m_1 k_1$$

où la masse ébranlée à chaque instant est la même dans les deux barres, on a, d'après les formules (131),

$$\alpha = 1,$$

qui remplit bien la condition (158), car $m_2 k_2 = m_1 k_1$ donne $\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, plus petit que 1. La perte proportionnelle, toujours positive, mais qui peut varier entre 1 et 0, est

$$(162) \quad 1 - \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2.$$

Les valeurs numériques de cette perte sont celles qu'on a données pour la perte (56) qui a lieu avec deux barres de même grosseur et de même matière, en substituant le rapport des masses totales au rapport $\frac{a_1}{a_2}$ des longueurs.

2° Dans le cas

$$r > 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 > m_1 k_1$$

où la masse ébranlée à chaque instant est plus grande dans celle des deux barres dont l'ébranlement met le plus de temps à parcourir la longueur, on a

$$(163) \quad \alpha = \frac{2r}{1+r} = \frac{2m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}$$

remplissant encore la condition (158), car $m_2 k_2 \cdot m_1 a_1 < m_1 k_1 \cdot m_2 a_2$ est la même chose que $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$ ou $\tau_1 < \tau_2$.

La perte proportionnelle (157) devient

$$(164) \quad \frac{4m_1 k_1 \cdot m_2 k_2}{(m_1 k_1 + m_2 k_2)^2} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \left(1 - \frac{a_1 k_2}{a_2 k_1} \right),$$

quantité positive ou nulle puisque $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{a_1 k_2}{a_2 k_1}$ est $=$ ou < 1 . Le cas

$\tau_1 = \tau_2$, où elle est nulle, est celui où les formules des vitesses après le choc deviennent celles des Traités de physique qui donnent zéro pour la force vive perdue.

Si, par exemple, les deux barres sont de même matière, ou, plus généralement, si le son se propage avec la même vitesse dans toutes deux, en sorte que

$$k_1 = k_2,$$

la perte proportionnelle se réduit à

$$(165) \quad \frac{4 \frac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2} \left(1 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}\right) \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)$$

donnant :

$$\text{si } m_2 = 2 m_1, \quad \text{perte proportionnelle } \frac{8}{9} \left(1 + \frac{a_1}{2 a_2}\right) \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right);$$

$$\text{si } m_2 = 3 m_1, \quad \text{perte proportionnelle } \frac{3}{4} \left(1 + \frac{a_1}{3 a_2}\right) \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right);$$

$$\text{qui pour } \frac{a_2}{a_1} = 1, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad 3, \dots, \quad \infty,$$

$$\text{ont des valeurs } \begin{cases} 0, & \frac{56}{225}, & \frac{32}{81}, & \frac{5}{9}, & \frac{64}{81}, \dots, & \frac{8}{9}, \\ 0, & \frac{19}{100}, & \frac{11}{36}, & \frac{7}{16}, & \frac{5}{9}, \dots, & \frac{3}{4}. \end{cases}$$

3° Dans le cas

$$r < 1 \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 < m_1 k_1,$$

où la masse envahie par l'ébranlement est plus petite, pour un même temps, dans celle des deux barres qui exige le plus de temps pour l'être sur toute sa longueur, il faut, dans l'expression (157), faire d'après les formules (143)

$$(166) \quad \begin{cases} \alpha = 1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \left(1 - 2r \frac{\frac{\tau_2}{\tau_1} - n}{1+r}\right) = \\ = 1 - \left(\frac{m_1 k_1 - m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}\right)^n \left[1 - \frac{2 m_2 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} \left(\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n\right)\right]. \end{cases}$$

Cette expression remplit la condition (158) de ne pas surpasser

$$\frac{2M_2}{M_1 + M_2} = \frac{2 \frac{m_2 a_2}{m_1 a_1}}{1 + \frac{m_2 a_2}{m_1 a_1}} = \frac{2r \frac{\tau_2}{\tau_1}}{1 + r \frac{\tau_2}{\tau_1}},$$

en sorte qu'on a toujours

$$(167) \quad 1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left(1 - 2r \frac{\frac{\tau_2}{\tau_1} - n}{1+r} \right) - \frac{2r \frac{\tau_2}{\tau_1}}{1 + r \frac{\tau_2}{\tau_1}} < \text{ou} = 0.$$

En effet, $\frac{\tau_2}{\tau_1} - n$ reste compris entre 0 et 1, puisque n est la partie entière du quotient de τ_2 par τ_1 . Supposons d'abord qu'il soit = 0, ou que τ_2 comprenne τ_1 un nombre exact de fois. Le premier membre de (167) sera, en mettant n pour $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ et multipliant par $(1+r)^n(1+nr)$,

$$\begin{aligned} & (1-nr)(1+r)^n - (1+nr)(1-r)^n \\ &= 2nr + 2n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} r^3 + 2n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{4} \frac{n-3}{3} \frac{n-4}{5} r^5 + \dots \\ & \quad - nr \left(2 + 2n \frac{n-1}{2} r^2 + 2n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} r^4 + \dots \right) \\ &= 2n \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-2}{3} - n \right) r^3 + 2n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} \left(\frac{n-4}{5} - n \right) r^5 + \dots, \end{aligned}$$

expression d'un nombre *fini* de termes tous négatifs.

Si nous attribuons, en second lieu, à $\frac{\tau_2}{\tau_1} - n$ sa deuxième valeur extrême, qui est 1, nous aurons la même chose avec $n+1$ au lieu de n , et la conclusion sera la même.

Enfin, en conservant entier ce premier membre de (167) et en y faisant $\frac{\tau_2}{\tau_1} - n = \varepsilon$, nous aurons, si nous multiplions par le produit toujours positif des dénominateurs, une expression en n et r toujours négative, plus ε multiplié par un polynôme d'un signe incertain. Quand ce polynôme sera négatif, l'ensemble le sera également, et la condition (167) sera satisfaite. Quand il sera positif, l'ensemble aura sa plus

grande valeur pour $\varepsilon = 1$; or nous venons de voir que si $\varepsilon = \frac{\tau_2}{\tau_1} - n = 1$, l'ensemble est encore positif. La condition (161) pour que la perte de force vive soit nulle ou positive est donc satisfaite par les formules de vitesses finales du cas $r < 1$ comme par celles des cas $r = 1$, $r > 1$.

Soient, par exemple, deux barres de même matière, ou plus généralement soit $k_2 = k_1$, d'où $r = \frac{m_2}{m_1}$.

Et soit $\frac{\tau_1}{\tau_2} = n = \frac{a_2}{a_1}$, ou a_2 multiple exact de a_1 .

Alors on a

$$\alpha = 1 - \left(\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} - 1} \right)^{\frac{a_2}{a_1}}.$$

D'où si		$\frac{m_1}{m_2} = 1$	2	3	4	5			
Et si	$\frac{a_2}{a_1} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \right\};$	$\alpha = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$			
			1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{25}$			
			1	$\frac{26}{27}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{98}{125}$			
			1	$\frac{80}{81}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{544}{625}$			
			1	$\frac{242}{243}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{2882}{3125}$			
					$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{65}{81}$	$\frac{211}{243}$

La perte proportionnelle (157) prend les valeurs suivantes :

Si	$\frac{a_2}{a_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$;	Perte =	0	0	0	0	0
			0,75	0,395	0,234	0,154	0,108
			0,889	0,634	0,4375	0,312	0,232
			0,9375	0,768	0,590	0,451	0,351
			0,96	0,845	0,6975	0,565	0,457.

Tels sont les rapports de la perte de force vive translatoire à celle qui aurait lieu dans le choc de deux corps ayant les mêmes masses,

et dénués d'élasticité. Cette perte proportionnelle est d'autant moindre, comme on voit, que la masse par unité de longueur est plus grande dans la barre la plus courte a_1 , relativement à ce qu'elle est dans la plus longue; et elle est d'autant plus forte que le rapport des longueurs est plus considérable, ou que les réflexions et *réfractions* de l'ébranlement ont été plus nombreuses avant l'instant $t = 2\tau_2$ où les deux barres se sont séparées.

16. Démonstration élémentaire (ou analogue à celles des Cours de physique) des formules nouvelles du choc longitudinal des barres élastiques, et, en même temps, de l'expression connue de la vitesse de propagation du son dans les tiges solides ou dans les colonnes d'air prismatiques. — Si, aux deux extrémités d'un prisme élastique, l'on applique deux pressions P égales et contraires, et uniformément réparties sur les divers éléments superficiels de ses bases, deux portions de ce prisme, séparées par une section transversale quelconque, exerceront l'une sur l'autre, dans l'état d'équilibre, une pression nécessairement de la même intensité et répartie de même. Il se comprimera uniformément; et si l'on appelle ω la surface de sa base, E un coefficient dit *module d'élasticité* longitudinale, et j la *compression* ou l'accourcissement par unité de longueur, compression qui est très-petite si les forces P n'excèdent pas ce que la matière peut porter sans que sa texture s'altère, on a

$$(a) \quad P = E\omega j;$$

égalité qui a encore lieu lorsque P et j sont supposées *négatives*, c'est-à-dire lorsque le prisme éprouve une *traction* et une *dilatation* au lieu d'une pression et d'une compression proprement dites.

Si, la barre prismatique étant dans son état naturel et en repos, l'on vient à appliquer une pareille force P sur une de ses deux bases, cette barre prendra de même la compression j donnée par (a), non pas de suite sur toute sa longueur, mais dans une partie qui sera graduellement croissante. Et si

$$kt$$

désigne la longueur qu'avait primitivement la partie qui se trouve ainsi

comprimée après un petit temps t , comme elle s'est accourcie de

$$kjt,$$

son origine, ou la base pressée, aura cheminé d'autant, c'est-à-dire aura parcouru un petit espace kjt . D'où il suit qu'en appelant

$$v$$

la vitesse prise par cette origine, et, aussi, nécessairement par les autres points de la partie comprimée puisqu'ils sont restés aux mêmes distances les uns des autres depuis la compression effectuée, on aura

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} v = \pm kj \text{ selon que le sens de la force exercée ou de la propagation de la} \\ \text{compression est, ou non, celui des vitesses comptées positivement.} \end{array} \right.$$

Une première conséquence est que si

$$\rho$$

désigne la densité de la matière, ou si $\rho \omega kt$ est la masse mue et comprimée au bout d'un temps t , l'on a, pour l'égalité de la quantité de mouvement que cette masse a acquise, à celle qui lui a été imprimée par la force $E \omega j$,

$$\rho \omega kt . kj = E \omega j . t;$$

le module E pouvant, du reste, avoir ici une valeur un peu autre que dans l'état statique, vu que la rapidité de la compression des tranches successives peut susciter des vibrations atomiques ou dégager de la chaleur.

On en tire pour la longueur k comprimée dans l'unité de temps, ou pour la *célérité* (mot que nous emploierons afin d'éviter la confusion avec les *vitesses* des molécules) *de la propagation de la compression* :

$$(c) \quad k = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Et cette formule représenterait également la célérité de la propagation de la dilatation due, soit à une traction, comme on a dit, soit simplement à la soustraction de la force qui a comprimé. Par conséquent elle représente, aussi, ce qu'on appelle *la vitesse de transmission du*

son, car le son est produit par un ou plusieurs petits ébranlements se composant d'une compression suivie d'une dilatation [*].

Si, au lieu d'être en repos, la barre qu'une force est venue com-

[*] Je ne connais pas d'autre démonstration élémentaire qui ait été donnée de cette expression (c), due à Newton, car celle qu'il en a présentée lui-même, et que son génie seul a comprise, n'a pas été regardée comme acceptable, et aucun auteur de Cours de physique n'a cru pouvoir la faire passer dans son enseignement, même en en modifiant les termes.

Je suis convaincu que la théorie de la propagation du son gagnerait en clarté si l'on considérait d'abord, comme je fais ici, la propagation d'une simple compression, produite par une force qui continue d'agir; en ne parlant qu'ensuite des vibrations ou des alternatives périodiques de compression et de dilatation qui compliquent la question fort simple de propagation.

En général une force constante qui agit sur une masse constante lui donne, comme on sait, un mouvement uniformément accéléré; mais si elle agit sur une masse *qui croît proportionnellement au temps*, telle que la masse $\rho \omega k t$ ci-dessus, elle lui donne une *vitesse constante*, comme celle qui se trouve ici désignée par v ou $\pm kj$.

Dans un cabinet de physique, on pourrait faire distinguer d'une manière très-ostensible cette *vitesse* des tranches d'une tige de la *célérité* du son qui s'y propage, par celle de la propagation de la jonction successive d'un certain nombre de rondelles enfilées sur une même tige horizontale qui les traverserait à frottement doux au milieu. On leur donnerait, par exemple, 10 millimètres d'épaisseur, et on les espacerait préalablement de *un* millimètre. En poussant de 1, de 2 centimètres celle de gauche, elles se joindraient les unes après les autres, et la *jonction* avancerait de 10, de 20 centimètres vers la droite; on verrait ainsi que la célérité de propagation de la jonction est dix fois plus grande que la vitesse constante des rondelles mises en mouvement et dont l'ensemble a été comprimé d'un dixième ($j = \frac{1}{10}$, $k = 10v$, $v = kj$).

La propagation des *ondes planes* par glissement transversal, dont il est tout aussi facile de démontrer élémentairement que la *célérité* est exprimée par $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ (G étant le coefficient d'élasticité de *glissement* du milieu où elles se forment), pourrait être figurée de même, au moyen de plaques polies et superposées, dont on limiterait le glissement relatif au dixième, par exemple, de leur épaisseur commune. On peut ainsi espérer un jour de traduire élémentairement et d'une manière claire les beaux résultats des recherches par lesquelles Cauchy a donné à la théorie de Fresnel une rigueur qui lui manquait (t. VIII de ce Journal, 1863, p. 381 à 413). Il est à peine besoin de dire que le même genre de démonstration s'applique à la formule théorique de la propagation d'une intumescence liquide ou d'une onde *solitaire* dans le cas du canal rectangulaire peu profond traité par Lagrange (*Méc. anal.*, 2^e Partie, sect. XI, art. 36).

primer ou dilater avait auparavant, dans toutes ses parties, une vitesse

$$v_0,$$

la nouvelle vitesse v des portions éprouvant ou perdant la compression ou la dilatation j sera

$$(d) \quad v = v_0 \pm kj,$$

car le cheminement de l'extrémité pressée a été $v_0 t \pm kjt$. Je dis *ou perdant*, parce que cette formule est également applicable, en choisissant d'une manière toujours facile le signe de kj , lorsque la dilatation ou compression résulte d'une soustraction de force, ou lorsqu'elle n'est autre que la cessation naturelle, en commençant par une extrémité, d'une compression ou d'une dilatation antérieure. C'est ce que j'exprimerai quelquefois en disant que

$$\pm kj$$

est la *vitesse de détente*.

Soient maintenant deux barres prismatiques qui viennent à se presser ou à se heurter mutuellement dans le sens longitudinal. Soient respectivement :

a_1, a_2 leurs longueurs;

V_1, V_2 les vitesses, comptées positivement de a_1 vers a_2 , qui animent uniformément leurs molécules à l'instant $t = 0$ où elles se rencontrent, ce qui exige

$$(e) \quad V_1 - V_2 > 0.$$

Soient encore

v_1 et j_1, v_2 et j_2 les vitesses et les compressions prises plus tard par diverses de leurs parties;

U_1, U_2 les vitesses de leurs centres de gravité;

m_1, m_2 leurs masses par unité de longueur;

k_1, k_2 les célérités de propagation des compressions et dilatations

dans leurs matières. Appelons aussi

$$(f) \quad r = \frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$$

le rapport des masses qui se sont ébranlées ou comprimées pendant un même temps dans la seconde et dans la première de ces barres.

Et supposons

$$(g) \quad \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2},$$

ou que celle des deux barres qui va derrière soit parcourue dans un temps moindre par le son que celle qui va devant : supposition permise, puisqu'on peut choisir à volonté le sens des vitesses regardées comme positives.

Au bout d'un temps quelconque t égal ou inférieur à $\frac{a_1}{k_1}$, les parties comprimées dans les deux barres auront une nouvelle vitesse uniforme, la même pour toutes deux puisqu'elles ont un point commun. Soit

u

cette vitesse. Elle a remplacé les vitesses V_1, V_2 dans ces parties, de longueurs $k_1 t, k_2 t$, dont les masses sont entre elles comme 1 est à r . On devra avoir, pour la conservation de la quantité totale du mouvement,

$$(1 + r)u = V_1 + rV_2.$$

On a aussi, pour ces parties, conformément à l'expression générale (d) $v_0 \pm kj$ de la vitesse nouvelle qui vient d'une vitesse antérieure v_0 et d'une compression effectuée j

$$u = V_1 - k_1 j_1, \quad u = V_2 + k_2 j_2,$$

eu égard, quant aux signes, à ce que les compressions se font suivant le sens positif des vitesses dans la deuxième barre et suivant un sens opposé dans la première. On tire de là :

$$(h) \quad \begin{cases} \text{De } t = 0 \text{ à } t = \frac{a_1}{k_1} : \\ u = v_1 = v_2 = \frac{V_1 + rV_2}{1 + r} = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r}, \\ j_1 = \frac{V_1 - u}{k_1} = r \frac{V_1 - V_2}{(1 + r)k_1}, \quad j_2 = \frac{u - V_2}{k_2} = \frac{V_1 - V_2}{(1 + r)k_2}; \end{cases}$$

expressions dont les deux dernières, relatives aux compressions, seraient trouvées directement par le même raisonnement qui a fourni l'expression (d) $v_0 \pm kj$, en remarquant simplement que l'extrémité commune aux deux parties $k_1 t$, $k_2 t$ a cheminé de ut , et, leurs autres extrémités, de $V_1 t$, $V_2 t$, en sorte qu'elles se sont accourcies de $(V_1 - u)t$, $(u - V_2)t$, qui, divisés par les longueurs $k_1 t$, $k_2 t$, donnent les proportions j_1 , j_2 des accroissements.

Au bout du temps

$$t = \frac{a_1}{k_1},$$

la barre a_1 , ainsi comprimée jusqu'à son extrémité libre ou non jointive, se dilate à partir de cette extrémité, ce qui ajoute à sa vitesse u , toujours en vertu de (d), une vitesse de détente

$$-k_1 j_1 = -(V_1 - u),$$

en sorte qu'on a, dans toute cette barre a_1 ,

$$(i) \quad \begin{cases} \text{quand } t = \frac{2a_1}{k_1}, \\ v_1 = 2u - V_1 = V_1 - \frac{2r}{1+r}(V_1 - V_2) = V_2 - \frac{r-1}{r+1}(V_1 - V_2), \\ j_1 = 0. \end{cases}$$

Cette vitesse $2u - V_1$ de toute la barre qui va derrière est moindre que la vitesse u encore possédée par une portion de la barre qui va devant, contiguë au point de leur contact. Mais pour savoir, par la comparaison des vitesses, si elles se sépareront ou non, il faut préalablement diminuer la vitesse u , possédée par cette dernière barre, de la vitesse de détente

$$k_2 j_2 = u - V_2$$

due à la compression (h) $j_2 = \frac{u - V_2}{k_2}$ qu'elle a. Cela réduit la vitesse de la seconde barre à

$$V_2.$$

Elles se sépareront donc à l'instant

$$t = \frac{2a_1}{k_1},$$

où le son a parcouru aller et retour la longueur de la première, si V_2 est plus grand que (i) $v_1 = V_2 - \frac{r-1}{1+r}(V_1 - V_2)$, c'est-à-dire si l'on a

$$(j) \quad r > 1, \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 > m_1 k_1;$$

ou si la barre que le son met le plus de temps à parcourir d'un bout à l'autre est aussi celle où la masse ébranlée dans un temps donné est la plus grande.

Si cette condition (j) est remplie, l'on aura pour la vitesse U_1 de toute la première barre, et, par suite, vu la condition de la conservation de quantité du mouvement

$$(k) \quad m_1 a_1 U_1 + m_2 a_2 U_2 = m_1 a_1 V_1 + m_2 k_2 V_2,$$

pour la vitesse U_2 du centre de gravité de la seconde barre après leur séparation, les expressions

$$(l) \quad \begin{cases} U_1 = v_1 = V_1 - \frac{2m_1 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} (V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} \frac{2m_1 k_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2} (V_1 - V_2); \end{cases}$$

qui, dans le cas particulier

$$r = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad m_2 k_2 = m_1 k_1,$$

se réduisent à

$$(m) \quad \begin{cases} U_1 = V_2, \\ U_2 = V_2 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} (V_1 - V_2) \quad [*]. \end{cases}$$

[*] Ce cas $r = 1$ comprend celui où les deux barres sont de même matière et d'égale section. MM. William Thompson et Tait, aux nos 302 à 305 d'un Cours de *Natural*

Mais si l'on a

$$(n) \quad r < 1, \quad \text{ou} \quad m_2 k_2 < m_1 k_1,$$

Philosophy actuellement sous presse (janvier 1867), démontrent simplement le résultat (m) $U_1 = V_2$ en remarquant : 1° que si les deux barres ont la même longueur, elles prendront et ensuite perdront leurs compressions dans le même temps d'un bout à l'autre, en sorte qu'elles se sépareront avec les mêmes vitesses relatives qu'au moment où elles se sont rencontrées, ou en échangeant leurs vitesses absolues; 2° que si elles sont d'inégale longueur, la plus courte, après le choc, sera exactement dans le même état que si elle en avait frappé une autre ayant sa longueur.

Le savant M. Rankine, qui cite ce passage de ses illustres compatriotes à la suite d'un extrait de mon Mémoire du 24 décembre 1866, publié par lui au n° 58 (15 février 1867) du Journal *The Engineer*, p. 133, y a ajouté une démonstration simple et ingénieuse de mes formules plus générales (l). Elle consiste à observer que le raisonnement de tous les Traités de Physique, fournissant les formules connues

$$U_1 = V_1 - \frac{2 m_2 a_2}{m_1 a_1 + m_2 a_2} (V_1 - V_2),$$

$$U_2 = U_2 + \frac{2 m_1 a_1}{m_1 a_1 + m_2 a_2} (V_1 - V_2),$$

est parfaitement légitime si le son, et par conséquent la compression et ensuite la détente, se propagent pendant le même temps d'un bout à l'autre des deux barres, ou si $\frac{a_1}{k_1} = \frac{a_2}{k_2}$; mais que si le son parcourt en un moindre temps la longueur de la première barre, ou si $\frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2}$, elle se trouve affectée comme si elle n'avait heurté, au lieu de la masse entière $m_2 a_2$ de la seconde barre, qu'une masse égale à la sienne $m_1 a_1$ multipliée par le rapport $\frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$ de celles qui s'ébranlent dans la deuxième et dans la première pendant un même temps quelconque; en sorte que, pour avoir U_1 , il faut, dans son expression précédente, mettre ce rapport à la place de celui $\frac{m_1 a_2}{m_1 a_1}$ des deux masses. Or cela donne précisément la première de mes formules nouvelles (l), dont la seconde se déduit par le principe de conservation de la quantité totale de mouvement.

Si je conserve ma démonstration élémentaire sans y substituer celle-ci, c'est qu'elle donne le détail de ce qui se passe, et permet d'apprécier dans quel cas les formules (l) cessent d'être applicables, en fournissant le moyen d'en établir alors d'autres (s).

les deux barres ne peuvent pas se séparer, comme nous venons de voir, à l'instant $t = 2 \frac{a_1}{k_1}$, et elles restent unies après cet instant.

Or je dis que si

$$n$$

est la partie entière du nombre de fois que $\frac{a_2}{k_2}$ contient $\frac{a_1}{k_1}$, ou si

$$(o) \quad n \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (n + 1) \frac{a_1}{k_1},$$

l'on a, n' étant tout nombre entier n'excédant pas n ,

$$(p) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l'instant } t = 2n' \frac{a_1}{k_1}, \\ \text{dans toute la barre } a_1, \quad v_1 = V_2 + \frac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'}} (V_1 - V_2), \quad j_1 = 0; \\ \text{et, dans une partie de la barre } a_2 \text{ contiguë au point de jonction,} \\ v_2 = V_1 + \frac{(1-r)^{n'-1}}{(1+r)^{n'}} (V_1 - V_2), \quad j_2 = \frac{(1-r)^{n'-1}}{(1+r)^{n'}} \frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{array} \right.$$

Pour le démontrer, remarquons d'abord en général que si les deux barres agissant l'une sur l'autre avec des vitesses V_1, V_2 , avaient, en même temps, et respectivement, au moment de leur rencontre, des compressions

$$J_1, J_2,$$

au lieu de se trouver dans l'état naturel ou sans compression comme nous l'avons précédemment supposé, elles auraient ensuite, de part et d'autre de leur point de contact, une vitesse u' et des compressions j_1, j_2 données par les expressions (h) où l'on ajouterait, aux vitesses acquises V_1, V_2 , les vitesses de détente $k_1 J_1, -k_2 J_2$ dues aux compressions J_1, J_2 , c'est-à-dire où l'on mettrait

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_1 + k_1 J_1, & V_2 - k_2 J_2, \\ \text{à la place de} & V_1, \quad V_2; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire qu'elles auraient ensuite une vitesse et des compressions

$$(q) \quad \begin{cases} u' = v_1 = v_2 = \frac{V_1 + k_1 J_1 + r(V_2 - k_2 J_2)}{1 + r}, \\ j_1 = r \frac{V_1 + k_1 J_1 - (V_2 - k_2 J_2)}{(1 + r) k_1}, \quad j_2 = \frac{V_1 + k_1 J_1 - (V_2 - k_2 J_2)}{(1 + r) k_2}. \end{cases}$$

En effet : 1° la réaction élastique due à la compression J_1 de la première barre est capable d'imprimer, pendant le temps t , une vitesse $k_1 J_1$ à la partie de cette barre dont $k_1 t$ est la longueur et $m_1 k_1 t$ la masse, puisqu'elle l'allonge de $k_1 t \cdot J_1$ par détente, et fait cheminer d'autant son extrémité supposée libre; elle imprime donc au système, dans le même temps t , une quantité de mouvement $m_1 k_1 t \cdot k_1 J_1$. De même la réaction élastique due à la compression J_2 de la seconde barre en imprime une $-m_2 k_2 t \cdot k_2 J_2$. Ajoutant ces deux quantités de mouvement à la quantité de mouvement primitive

$$m_1 k_1 t \cdot V_1 + m_2 k_2 t \cdot V_2$$

des deux mêmes parties de barre, et égalant la somme à celle

$$(m_1 k_1 t + m_2 k_2 t) u'$$

que ces parties possèdent au bout du même temps t , l'on obtient bien la première expression (q).

2° Comme l'extrémité commune à ces deux portions des barres a cheminé de $u' t$, et comme les autres extrémités des mêmes portions ont cheminé respectivement de $V_1 t$, $V_2 t$, leurs accourcissements sont de $(V_1 - u') t$, $(u' - V_2) t$; d'où, en divisant par les longueurs, et en ajoutant, aux quotients, les compressions primitives, on déduit pour les proportions nouvelles de leurs compressions

$$j_1 = J_1 + \frac{V_1 - u'}{k_1}, \quad j_2 = J_2 + \frac{u' - V_2}{k_2},$$

identiques aux deux dernières expressions (q).

Or, supposons un instant que les formules à démontrer (p) l'aient déjà été pour une certaine valeur de n' au-dessous de n .

Les deux barres prendront après l'instant considéré $t = 2n' \frac{a_1}{k_1}$, de part et d'autre de leur jonction, une vitesse et des compressions nou-

velles, que l'on obtiendra par les formules (q) écrites tout à l'heure, ou en mettant comme nous disons, dans (h), la vitesse actuelle (p) v_1 de a_1 à la place de V_1 , et, à la place de V_2 , la vitesse (p) v_2 de a_2 , diminuée de $k_2 j_2$ qui serait due à la détente de la compression (p) j_2 de cette deuxième barre. Il résultera de cette substitution :

$$(r) \quad \begin{cases} \text{qu'après l'instant } t = 2n' \frac{a_1}{k_1}, \text{ on aura, au point de jonction,} \\ v_1 = v_2 = V_2 + \frac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}} (V_1 - V_2), \\ j_1 = \frac{r(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}} \frac{V_1 - V_2}{k_1}, \quad j_2 = \frac{(1-r)^{n'}}{(1+r)^{n'+1}} \frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{cases}$$

Ces valeurs de v_2 et de j_2 subsisteront, pour une portion de la barre a_2 contiguë à la barre a_1 , au delà du temps $2 \frac{a_1}{k_1}$ pendant lequel celle-ci acquerra sur toute sa longueur, puis perdra, la compression (r) j_1 ; c'est-à-dire subsisteront jusqu'après l'instant

$$t = (2n' + 2) \frac{a_1}{k_1};$$

mais celles qui sont relatives à la barre a_1 devront alors être remplacées par

$$j_1 = 0, \quad v_1 = \text{la valeur (r) en en soustrayant } k_1 j_1,$$

vu la détente qu'elle a éprouvée en commençant par son extrémité libre, depuis un premier temps écoulé $\frac{a_1}{k_1}$, ou depuis l'instant $t = (2n' + 1) \frac{a_1}{k_1}$ où la vitesse v_1 et la compression j_1 données par (r) ont embrassé la totalité de cette barre. On trouvera, au moyen de cette soustraction, précisément :

$$\begin{cases} \text{A l'instant } t = 2(n' + 1) \frac{a_1}{k_1}, \\ v_1 \text{ et } v_2, \quad j_1 \text{ et } j_2 = \text{les expressions (p) avec } n' + 1 \text{ au lieu de } n'. \end{cases}$$

Or ces expressions (p) sont prouvées pour

$$n' = 1,$$

puisqu'elles ne sont autre chose, alors, que les expressions (h) pour

v_2 et j_2 , et les expressions (i) pour v_1 et j_1 . Elles sont donc prouvées, ainsi que les formules (r) qui s'en déduisent, pour toutes les valeurs $n' = 2, 3, \dots$ jusqu'à n inclusivement.

Pour déduire de là les vitesses à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k_2},$$

supposons d'abord

$$2 \frac{a_2}{k_2} \text{ compris entre } 2n \frac{a_1}{k_1} \text{ et } (2n+1) \frac{a_1}{k_1},$$

ce qui est une des deux hypothèses qu'on peut faire quand on a (o) $n \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (n+1) \frac{a_1}{k_1}$. La barre a_1 , qui, à l'instant $t = 2n \frac{a_1}{k_1}$, avait tout entière la vitesse v_1 donnée par l'expression (p) avec n au lieu de n' , n'aura plus, à l'instant $t = 2 \frac{a_2}{k_2}$, cette vitesse que sur ce qui restera de sa longueur a_1 , du côté de l'extrémité libre non jointive, quand on en aura retranché, du côté du point de jonction, une partie égale à la célérité k_1 multipliée par le temps écoulé $2 \frac{a_2}{k_2} - 2n \frac{a_1}{k_1}$. La vitesse de cette partie sera devenue celle qui est donnée par (r) avec n au lieu de n' . La barre a_1 se composera donc, à l'instant

$$t = \frac{2a_2}{k_2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D'une partie } (2n+1)a_1 - 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 \text{ ayant une vitesse } V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (V_1 - V_2), \\ \text{D'une partie } 2 \frac{k_1}{k_2} a_2 - 2na_1 \text{ ayant une vitesse } V_2 + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}} (V_1 - V_2). \end{array} \right.$$

Multipliant les longueurs par les vitesses, et divisant par la longueur totale a_1 , l'on a la première des deux expressions suivantes, dont la seconde n'est que ce qui résulte du principe (k) $m_1 a_1 U_1 + m_2 a_2 U_2 = m_1 a_1 V_1 + m_2 a_2 V_2$:

$$(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = V_2 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left(1 - 2r \frac{\frac{a_2 k_1}{a_1 k_2} - n}{1+r} \right) (V_1 - V_2), \\ U_2 = V_2 + \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} (V_1 - U_1). \end{array} \right.$$

Nous n'avons pas besoin de faire un calcul analogue pour le cas où $2 \frac{a_2}{k_2}$ est compris entre $(2n+1) \frac{a_1}{k_1}$ et $(2n+2) \frac{a_1}{k_1}$, ce qui est la seconde des deux suppositions possibles quand $n \frac{a_1}{k_1} < \frac{a_2}{k_2} < (n+1) \frac{a_1}{k_1}$. On trouverait la même chose, car, dans ces deux suppositions, la barre a_2 se compose toujours de $n+1$ parties ayant nécessairement des longueurs et des vitesses partielles exprimées de même, ce qui donnerait, pour la vitesse du centre de gravité de cette barre, et par conséquent pour celle du centre de gravité de la barre a_1 , des expressions aussi les mêmes.

Prouvons maintenant que les deux barres, quand $r < 1$, ou quand elles ne se sont pas séparées à l'instant $t = 2 \frac{a_1}{k_1}$, se séparent nécessairement à l'instant $t = \frac{2a_2}{k_2}$ pour lequel nous venons de calculer les vitesses (s) de leurs centres de gravité.

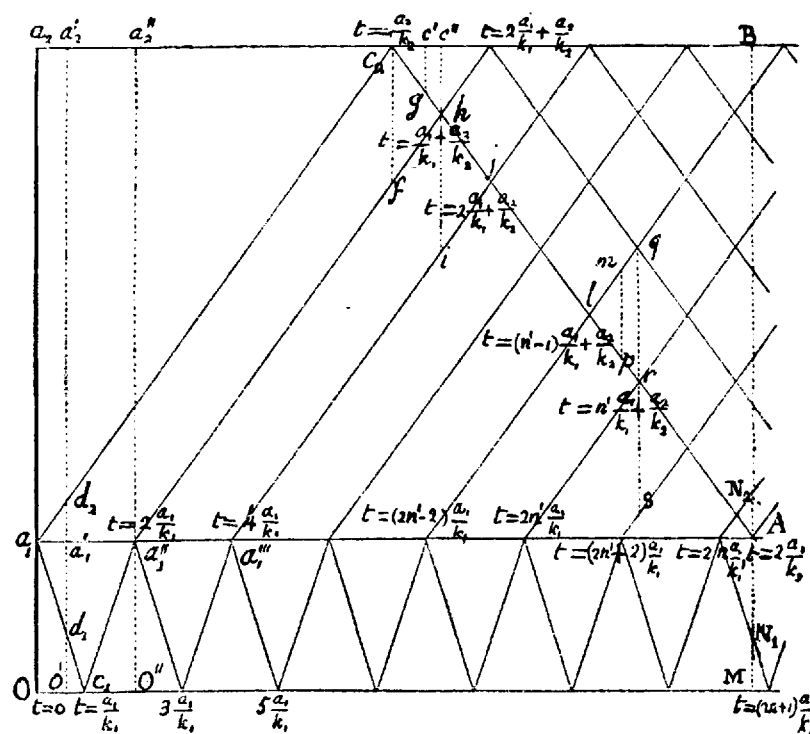
Nous le ferons d'une manière claire au moyen d'une construction peignant la manière dont les barres, aux instants successifs, se divisent en plusieurs parties quant aux compressions et aux vitesses.

Prenons pour abscisses, comptées à partir d'un point d'origine O sur une droite OM, les temps t depuis l'instant $t=0$ de la rencontre des deux barres, et, pour ordonnées, portées parallèlement à une orthogonale Oa_1a_2 , les distances de leurs divers points à l'extrémité libre de la première a_1 , ces distances étant conservées dans leurs grandeurs primitives, ou en abstrayant les petits accourcissements et allongements éprouvés. Si Oa_1, a_1a_2 sont les longueurs a_1, a_2 des deux barres, et si, après avoir porté sur la ligne d'abscisses OM et sur les deux parallèles a_1A, a_2B les abscisses qui y sont cotées, savoir :

$$t = \frac{a_1}{k_1}, 3 \frac{a_1}{k_1}, \dots; t = 2 \frac{a_1}{k_1}, 4 \frac{a_1}{k_1}, \dots, 2 \frac{a_2}{k_2}, \dots; t = \frac{a_2}{k_2}, 2 \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}, \dots,$$

l'on joint, par les lignes obliques de la figure, les points ainsi déterminés, toute droite verticale ou parallèle à Oa_1a_2 , comprise entre les horizontales OM et a_2B , donnera, pour l'instant marqué par son abscisse, et entre les points où elle coupe ces diverses lignes ainsi que a_1A ,

les longueurs des parties des barres dont les compressions ainsi que les vitesses auront des grandeurs différentes; en sorte que les intersections marqueront les endroits où ces vitesses et ces compressions passent brusquement d'une grandeur à une autre. Ainsi la verticale $O'a_1a_2$,



dont l'abscisse $t = a_1/k_1$ indique un instant compris entre ceux $t = 0$ et $t = \frac{a_1}{k_1}$, donne, par ses intersections d_1, d_2 avec les obliques a_1c_1, a_1c_2 , les longueurs $k_1t = a_1d_1, k_2t = a_1d_2$ des deux barres où les vitesses et les compressions sont v_1 et j_1, v_2 et j_2 représentées par les formules (h); tandis que les parties $O'd_1, d_2a_2$ ont encore les vitesses primitives V_1, V_2 avec des compressions nulles.

Et la verticale $O''a_1a_2$ dont l'abscisse est celle de l'instant

$$t = \frac{a_1}{k_1},$$

fournit, entre a_1'' et son intersection avec $a_1 c_2$, la longueur

$$2 \frac{k_2}{k_1} a_1$$

de la partie de la barre a_2 contiguë au point de jonction ; partie qui à cet instant possède la vitesse et la compression données encore par (h) , tandis que toute la barre $a_1 = O'' a_1''$, dont la compression se trouve redevenue nulle, est animée de la vitesse donnée par (i) .

Plus tard (si les barres ne se séparent pas alors), quand arrive l'instant

$$t = \frac{a_2}{k_2} = a_2 c_2,$$

la ligne verticale fc_2 montre qu'une portion de la barre a_2 , de même longueur $2 \frac{k_2}{k_1} a_1$ que celle dont il vient d'être question, possède encore cette même vitesse et cette même compression (h)

$$v_2 = u = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r}, \quad j_2 = \frac{u - V_2}{k_2}.$$

Mais comme cette portion comprimée arrive à être contiguë à l'extrémité libre c_2 , la barre a_2 commence alors à se détendre à partir de cette extrémité ; elle prend en conséquence, conformément à l'expression générale $(d) v = v_0 + kj$, et sur une portion telle que $c'g$ ou $c''h$, qui croît avec une célérité k_2 :

$$(t) \quad \begin{cases} \text{une vitesse nouvelle } v_2 = u + k_2 \frac{u - V_2}{k_2} = V_2 + 2 \frac{V_1 - V_2}{1 + r}, \\ \text{et une compression } j_2 = 0. \end{cases}$$

Cette détente se propage vers le bas ainsi que la vitesse v_2 donnée par (t) , jusqu'à ce qu'elle se croise, en h , dans la même barre a_2 , avec la compression qui est partie, à l'instant $t = 2 \frac{a_1}{k_1}$, de son extrémité a_1'' joignant la barre a_1 , c'est-à-dire jusqu'à l'instant

$$t = \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}, \quad \text{abscisse du point } h.$$

A ce dernier instant, sur une longueur ih , aussi égale à $fc_2 = 2 \frac{k_2}{k_1} a_1$, mais comptée en deçà du point h où le croisement s'opère, la barre a_2 possède la vitesse et la compression qu'elle a eues, au point de sa jonction avec l'autre barre, entre l'instant $t = 2 \frac{a_1}{k_1} = a_1 a_1''$, et l'instant

$$t = 4 \frac{a_1}{k_1} = a_1 a_1'';$$

instant où il est parti, de a_1'' , une nouvelle compression qui produira, en j , un autre croisement lorsque arrivera l'instant subséquent

$$t = 2 \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}.$$

En continuant ce raisonnement, et en considérant ce qui se passe dans la même barre a_2 lors du croisement de sa détente, à l'endroit et à l'instant marqués par le point l , avec la compression qui est partie du point de sa jonction avec l'autre barre à l'instant antérieur

$$t = (2n' - 2) \frac{a_1}{k_1},$$

il nous sera facile de prouver qu'on a

$$(u) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Après l'instant } t = (n' - 1) \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} \text{ de ce croisement,} \\ \text{et de part et d'autre de l'endroit } l \text{ où il s'opère} \\ v_2 = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r} + \frac{(1 - r)^{n'-1}}{(1 + r)^{n'}} (V_1 - V_2), \\ j_2 = - \frac{V_1 - V_2}{(1 + r) k_2} + \frac{(1 - r)^{n'-1}}{(1 + r)^{n'}} \frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{array} \right.$$

Supposons en effet ces expressions prouvées pour une certaine valeur de n' , au plus égale à $n - 1$. Elles continueront de représenter la vitesse et la compression de la barre a_2 dans une portion croissante, telle que mp , qr , jusqu'à l'instant

$$t = n' \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}$$

d'un croisement subséquent, s'opérant en r par la rencontre de la détente, qui continue sa marche descendante, avec la compression qui est partie, en sens contraire, du point de jonction avec la barre a_1 à l'instant $t = 2n' \frac{a_1}{k_1}$. Alors, c'est-à-dire à l'instant $t = n' \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2}$, si qrs est une verticale ou une portion d'ordonnée, l'on a deux parties rq , rs de la barre a_2 qui sont contiguës et qui ont, savoir, la partie rq , allant devant, les vitesses v_2, j_2 données par les formules (u), et, la partie rs , allant derrière, la vitesse et la compression que possédait la barre a_2 au point de sa jonction avec a_1 entre les instants $t = 2n' \frac{a_1}{k_1}$ et $t = (2n' + 2) \frac{a_1}{k_1}$, c'est-à-dire la vitesse v_2 et la compression j_2 données par les formules (r), qui ont été démontrées tout à l'heure. Mettant celles-ci à la place de V_1, J_1 , et celles-là à la place de V_2, J_2 dans les formules générales (q) comme s'il s'agissait de deux barres, mais en y remplaçant le rapport r par 1, et k_1 par k_2 , l'on obtient, pour la vitesse et la compression de la barre a_2 ,

$$(v) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Après l'instant } t = n' \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} \text{ et de part et d'autre de} \\ \text{l'endroit } r \text{ où le croisement s'y opère à cet instant,} \\ v_2 = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1 + r} + \frac{(1 - r)^{n'}}{(1 + r)^{n' + 1}} (V_1 - V_2), \\ j_2 = -\frac{V_1 - V_2}{(1 + r) k_2} + \frac{(1 - r)^{n'}}{(1 + r)^{n' + 1}} \frac{V_1 - V_2}{k_2}; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire précisément les formules (u) avec $n' + 1$ mis au lieu de n' .

Or ces formules (u) sont prouvées pour $n' = 1$, puisqu'elles ne sont autre chose alors que les formules (t). Elles sont donc vraies pour toute valeur de n' pouvant aller jusqu'à n .

Il en résulte, en mettant maintenant n à la place de n' , qu'à l'instant

$$t = 2 \frac{a_2}{k_2} = a_1 A$$

qui est entre ceux $t = 2n \frac{a_1}{k_1}$ et $t = (2n + 2) \frac{a_1}{k_1}$, et pour deux parties AN_1, AN_2 alors contiguës au point de jonction A des deux barres,

les vitesses et les compressions ont les valeurs

$$\begin{aligned} \text{Dans la barre } a_1 \quad & \begin{cases} v_1 = V_2 + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}} (V_1 - V_2), \\ j_1 = r \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}} \frac{V_1 - V_2}{k_1}. \end{cases} \\ \text{Dans la barre } a_2 \quad & \begin{cases} v_2 = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{1+r} + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}} (V_1 - V_2), \\ j_2 = -\frac{V_1 - V_2}{(1+r)k_2} + \frac{(1-r)^n}{(1+r)^{n+1}} \frac{V_1 - V_2}{k_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Or on trouve, avec ces valeurs,

$$v_2 - k_2 j_2 > v_1 + k_1 j_1;$$

en effet la substitution donne

$$v_2 - k_2 j_2 - v_1 - k_1 j_1 = \left[\frac{2}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] (V_1 - V_2),$$

quantité toujours positive; car puisque n est entre 0 et 1, le premier terme du binôme entre crochets est plus grand que 1, et le second est plus petit que 1.

La vitesse v_2 possédée à l'instant $t = \frac{2a_2}{k_2}$ par la barre qui va devant, diminuée de la vitesse de détente due à sa compression j_2 , excède donc la vitesse v_1 possédée par l'autre barre, augmentée de la vitesse de détente due à sa compression j_1 . Elles se sépareront donc.

C'est ce qu'on voit également, au reste, par les expressions générales (q) des compressions j_1, j_2 après l'action mutuelle de deux barres, car elles sont négatives lorsque $V_2 - k_2 J_2 - V_1 - k_1 J_1$ est positif; or ces compressions négatives à l'endroit du contact sont impossibles entre deux barres sans adhérence mutuelle.

Donc les formules nouvelles (s) représentent bien les vitesses de translation des deux barres après leur choc dans le cas

$$r < 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad m_2 k_2 < m_1 k_1$$

où la barre la plus tôt parcourue d'un bout à l'autre par le son est celle

dont la masse ébranlée à chaque instant est la plus considérable; de même que les formules (1) représentent ces vitesses dans l'autre cas $r > 1$ d'abord examiné.

Ce sont les formules (143), (133) du n° 11, mais démontrées ici d'une manière élémentaire, ou sans établissement ni intégration d'équation différentielle.

17. Conclusion. — J'ai cru devoir donner quelque étendue au développement de cette théorie nouvelle du choc de corps parfaitement élastiques, dont l'idée première est due aux méditations de Coriolis et aux courtes recherches faites sur son invitation par Cauchy pour un cas particulier. J'ai fait voir que l'illustre analyste avait énoncé une conclusion juste en ce qui regarde la fin de l'action mutuelle de deux barres de même matière et de même section qui se sont heurtées, et la vitesse finale prise par la plus courte des deux, mais qu'il fallait évaluer autrement qu'il n'a fait la perte de force vive translatrice résultant de ce que l'autre barre conserve ensuite une compression qui la fait vibrer; et, aussi, qu'il ne suffisait pas en général, pour que le corps heurté se sépare du corps heurtant, que celui-là ait à un certain instant une vitesse plus grande que celui-ci à leur point de jonction, comme M. Cauchy paraît l'avoir cru. J'ai montré que M. Poisson, en jugeant avec raison qu'il fallait tenir compte des compressions dont les deux corps se trouvent affectés au même instant et au même point, exigeait trop en ajoutant, à la condition de l'excès de vitesse, celle que ces compressions fussent nulles dans l'un comme dans l'autre corps, et, aussi, que c'est faute d'avoir aperçu qu'elles pouvaient devenir négatives, qu'il a tiré de ses formules la fausse et singulière conclusion que les barres resteront indéfiniment unies, pour peu que leurs longueurs soient inégales. Elles se séparent toujours à l'instant où leurs compressions à l'endroit du contact prendraient ce signe négatif si elles restaient unies; condition qui revient, en général, à ce que la vitesse actuelle de la barre heurtée, diminuée de celle de détente due à sa compression, surpasse la vitesse actuelle de la barre heurtante augmentée de la vitesse de détente que sa compression engendrerait quand elle en a une.

J'ai appliqué le même genre de recherches, au moyen de formules

intégrales en termes finis, au cas plus général du choc de deux barres prismatiques de grosseurs et même de matières différentes, en renvoyant à un autre temps le calcul long et compliqué, fait sur une suite d'exemples numériquement définis, des conséquences de formules en série transcendante applicables au choc de deux ou plusieurs corps des formes les plus variées, susceptibles d'être approximativement assimilés à un ensemble de troncs de cône ou de pyramide vibrant par tranches parallèles. La séparation des deux barres prismatiques se fait lorsque le son a parcouru aller et retour celle des deux qui exige pour cela le moins de temps, si c'est en même temps celle dont la masse ébranlée ou comprimée à chaque instant est la plus petite; dans le cas contraire la séparation s'opère lorsque le son a parcouru aller et retour celle des deux qui exige pour cela le temps le plus long. J'ai montré, en examinant ce que deviennent ensuite les deux barres, que leurs vibrations ne les feront pas se rejoindre, ou que leur séparation est définitive dans les deux cas énoncés.

Les formules de vitesses finales, dans ces deux cas, sont différentes. Celles du second cas, sans avoir rien de compliqué, contiennent *en exposant* le nombre variable des réflexions éprouvées par le son dans la première barre.

Je donne de ces formules, comme des premières, une démonstration élémentaire susceptible de passer généralement dans l'enseignement; et, à cette occasion, je démontre, aussi élémentairement et d'une manière extrêmement simple, l'expression de la vitesse de propagation du son, ce qui n'a pas été fait à ma connaissance depuis la démonstration de Newton, qu'aucun auteur moderne de Cours de physique n'a regardée comme acceptable et susceptible d'être introduite dans ses leçons.

J'aurais pu borner mon travail à ces sortes de démonstrations. Mais les solutions analytiques, telles que celles qui m'ont conduit aux résultats présentés, portent leur genre de conviction comme les solutions synthétiques, et ce n'est pas trop du concours de deux genres de recherches et de raisonnements pour établir complètement des résultats tout nouveaux et controversés. Et puis, il eût manqué quelque chose, savoir la preuve que les deux barres, après s'être séparées pendant un temps fini, ne se rejoindront pas en vibrant.

Mon analyse d'ailleurs, aidée de ces tableaux raisonnés (94) de scissions de limites, ainsi que de ces *diagrammes* dont chacun remplace un grand nombre de pages de formules (et qui me paraissent offrir généralement le seul moyen d'éviter d'innombrables confusions dans la détermination des valeurs diverses de fonctions *discontinues* de deux variables telles que x et t) [*], donne d'une manière complète ce que devient jusqu'à une époque quelconque, et dans toutes ses parties, l'ensemble de deux ou plusieurs barres restant unies : problème d'autant plus intéressant par lui-même qu'il suffit d'en modifier légèrement la solution pour la rendre applicable non-seulement au cas où la barre heurtée est fixe à un bout, mais même au problème des vibrations transversales d'une corde flexible se composant de plusieurs parties de grosseurs et de matières différentes. Je pense donc que les développements analytiques où je suis entré pourront être jugés utiles indépendamment du but principal dont la poursuite m'a fait entreprendre ces longues et délicates recherches.

ERRATA.

- Page 258, au bas du diagramme (24), au point T. La formule $kt = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3$ aurait dû être écrite horizontalement.
- 258, même diagramme, à droite, deux lignes au-dessus du point T, au lieu de $-k J_3 + V_3$, lisez $-k J_1 + V_1$.
- 259, ligne 3, au lieu de voyez le n° 15, lisez voyez le n° 16.
- 260, au bas et à droite de chacun des deux diagrammes (27) (28), au lieu de $x - kt = -a_1 - a_2$, lisez $x - kt = -a_1 - 2a_2$.
- 260 et 272, sur la ligne ponctuée horizontale du diagramme (28), au lieu de $x = a$, lisez $x = a_1$.
- 261, ligne 4 en remontant, au lieu de $a_1 - (2a_1 - a_1)$, lisez $a_2 - (2a_1 - a_2)$.
- 283, ligne 10 en remontant, au lieu de (51), lisez (50).

[*] Ils ont été gravés par le procédé *paniconographique* de M. Gillot, qui transforme à peu de frais un dessin lithographique en un cliché-relief. Le peu de netteté des nos (89), (118), (119), (148), (150), (151), (152), ne doit être attribué qu'à ce que j'en ai fait moi-même le dessin et la lettre sur papier à autographier, le temps m'ayant manqué pour recourir à la plume exercée d'un calligraphe ou au burin d'un graveur sur pierre.

Page 287, formule (61), au lieu de $\frac{m_1 k_1}{m_2 k_2}$, lisez $\frac{m_2 k_2}{m_1 k_1}$.

290, ligne 8, au lieu de $\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)_{x_1=0}$, lisez $\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)_{x_2=0}$.

295, dernière ligne, au lieu de $-2\frac{k_1}{k_2}a_2, -\frac{k_1}{k_2}a_2$, lisez $-2\frac{k_2}{k_1}a_1, -\frac{k_2}{k_1}a_1$.

300, ligne 12, au lieu de $t = 2\tau$, lisez $t = 2\tau_1$.

305, ligne 11, au lieu de $\frac{V_1 - V_2}{(1+r)^2} = W_m$, lisez $\frac{V_1 - V_2}{(1+r)^3} = W_m$.

307, ligne 9 [ou dernière ligne de (102)], au lieu de $a_1 + 2a_1$, lisez $a_1 + 2a_2$.

315, ligne 2 du premier $F'_1 \{ \quad \}$, au lieu de $-(2i' + 1)a_1$, lisez $-(2i' - 1)a_1$.

318, ligne 2 en remontant, au lieu de $2W_1$, lisez $2W_i$.

319, avant-dernière ligne, au lieu de $-6\frac{k_1}{k_2}a_2$, lisez $-6\frac{k_2}{k_1}a_1$.

325, ligne 5 en remontant, au lieu de $\frac{du_2}{dt}$, lisez $\frac{du_1}{dt}$.

326, ligne 6 en remontant, au lieu de $a_1 + 2\frac{k_1}{k_2}a_2$, lisez $a_1 + 2\frac{k_2}{k_1}a_1$.

327, ligne 4, au lieu de $m_1 a_1 = M$, lisez $m_1 a_1 = M_1$.

327, ligne 3 en remontant, au lieu de W'_1, W_1 , lisez W'_i, W_i .

