

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Nombre des représentations d'un entier quelconque sous
la forme d'une somme de dix carrés**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 11 (1866), p. 1-8.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__1_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

NOMBRE DES REPRÉSENTATIONS

d'un entier quelconque sous la forme d'une somme de dix carrés;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je vais d'abord reproduire, sans y rien changer, une Note que j'ai insérée sous ce même titre dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 19 juin 1865). Elle est ainsi conçue :

« La question dont je veux m'occuper ici pour en donner une solution complète m'a paru longtemps bien difficile. Il s'agissait de trouver une expression simple du nombre N des représentations dont un entier quelconque n est susceptible sous la forme d'une somme de dix carrés. Eisenstein a traité (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 135) le cas particulier d'un entier impair $\equiv 3 \pmod{4}$; mais après avoir indiqué la formule propre à ce cas, il ajoute qu'il n'y a pas de formule semblable pour les entiers $\equiv 1 \pmod{4}$. Une remarque de l'illustre géomètre au sujet des formes quadratiques à plus de huit indéterminées semble même tendre à décourager toute recherche ultérieure. Des entiers pairs, Eisenstein ne dit rien. Plus tard (cahier de juillet 1861, p. 238) j'ai traité le cas du double d'un entier $\equiv 3 \pmod{4}$; on restait toujours très-loin du but. Enfin mes efforts ont abouti. J'ai eu le bonheur d'arriver à la formule générale, et cela au moment même où je désespérais presque d'y jamais parvenir. Soit λ l'excès (*pris positi-*

vement) de la somme des quatrièmes puissances des diviseurs de n qui sont $\equiv 1 \pmod{4}$ sur la somme des quatrièmes puissances des diviseurs de n qui sont $\equiv 3 \pmod{4}$. Cet excès déjà employé par Eisenstein est un des éléments de ma formule. Mais il faut, de plus, avoir égard à la puissance de 2 par laquelle n est divisible; je désignerai l'exposant de cette puissance par α , en sorte que l'on ait $n = 2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. Observons en passant que la valeur de λ ne dépend pas de celle de α ; elle est la même pour n et pour m . On distinguera le cas de $m \equiv 1 \pmod{4}$ et celui de $m \equiv 3 \pmod{4}$. En outre, quand n est la somme de deux carrés, il faudra compter le nombre μ des solutions de l'équation

$$n = s^2 + s'^2,$$

où les entiers s, s' sont indifféremment positifs, nuls ou négatifs, et aussi calculer la somme des produits $s^2 s'^2$ pour toutes les solutions. Cette somme étant représentée par ν , on aura

$$N = \frac{4}{5} \left(16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right) \lambda + \frac{8}{5} n^2 \mu - \frac{64}{5} \nu.$$

» Quand m est $\equiv 3 \pmod{4}$, l'équation $n = s^2 + s'^2$ est impossible; μ et ν sont donc nuls, et l'on a seulement

$$N = \frac{4}{5} (16^{\alpha+1} - 1) \lambda,$$

attendu qu'alors

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1.$$

Supposez de plus n impair, c'est-à-dire $\alpha = 0$, et vous retombez sur la formule d'Eisenstein. Faites au contraire $\alpha = 1$, et vous retrouverez un résultat que j'ai obtenu dans le temps.

» Quand m est $\equiv 1 \pmod{4}$, on a

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1,$$

partant

$$N = \frac{4}{5} (16^{\alpha+1} + 1) \lambda + \frac{8}{5} n^2 \mu - \frac{64}{5} \nu.$$

Mais dans cette hypothèse même de $m \equiv 1 \pmod{4}$, il se peut que l'équation $n = s^2 + s'^2$ soit impossible; alors, μ et ν étant nuls, il reste seulement

$$N = \frac{4}{5} (16^{\alpha+1} + 1) \lambda.$$

» Je renvoie pour de plus amples développements à un prochain cahier du *Journal de Mathématiques*. »

2. Ajoutons maintenant quelques exemples. Et d'abord soit $n = 1$, d'où $\alpha = 0$, $m = 1$, $\lambda = 1$, puis $\mu = 4$ et $\nu = 0$, en vertu des deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2, \quad 1 = 0^2 + (\pm 1)^2.$$

Notre formule donnera dans ce cas

$$N = \frac{4}{5} (16 + 1) + \frac{8}{5} \cdot 4 = 20,$$

résultat exact, attendu que dans l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

on peut faire occuper à $(\pm 1)^2$ dix places différentes.

Soit, en second lieu, $n = 2$, d'où $\alpha = 1$, $m = 1$, $\lambda = 1$, puis $\mu = 4$ et $\nu = 4$, en vertu de l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2.$$

On aura par notre formule

$$N = \frac{4}{5} (16^2 + 1) + \frac{8}{5} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{64}{5} \cdot 4 = 180.$$

Or l'équation

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

fournit effectivement pour l'entier 2 cent quatre-vingts représentations lorsqu'on y opère les permutations qu'elle comporte.

Soit ensuite $n = 3$, d'où $\alpha = 0$, $m = 3$, $\lambda = 3^4 - 1 = 80$; on a cette fois $\mu = 0$ et $\nu = 0$, puisque 3 n'est pas somme de deux carrés. Notre formule donne donc

$$N = \frac{4}{5}(16 - 1) \cdot 80 = 960;$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

où l'on aura soin d'opérer les permutations convenables.

Soit encore $n = 4$, d'où $\alpha = 2$, $m = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 4$, $\nu = 0$. On aura par notre formule

$$N = \frac{4}{5}(16^3 + 1) + \frac{8}{5} \cdot 4^2 \cdot 4 = 3380,$$

résultat confirmé par les deux identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

eu égard aux permutations qu'elles comportent et qui sont au nombre de dix pour l'une et de deux cent dix pour l'autre.

Soit enfin $n = 5$, partant $\alpha = 0$, $m = 5$, $\lambda = 5^4 + 1 = 626$; puis $\mu = 8$ et $\nu = 32$, en vertu des deux identités

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2, \quad 5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2.$$

D'après notre formule, il faudra que

$$N = \frac{4}{5}(16 + 1) \cdot 626 + \frac{8}{5} \cdot 25 \cdot 8 - \frac{64}{5} \cdot 32 = 8424;$$

or on s'assurera qu'il en est ainsi au moyen des deux équations

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications numériques.

3. Décomposons l'entier m de toutes les manières possibles en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués. L'excès de la somme des quatrièmes puissances des diviseurs $d \equiv 1 \pmod{4}$ sur celle des diviseurs $d \equiv 3 \pmod{4}$ sera

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^4,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^4,$$

valeur positive ou négative suivant que m est $\equiv 1$ ou $3 \pmod{4}$. Comme λ désigne cet excès pris positivement, on a

$$\lambda = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^4,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \rho_4(m),$$

en employant une notation dont nous avons souvent fait usage dans ce Journal et qui consiste à désigner généralement par

$$\rho_v(m)$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^v.$$

La premier terme

$$\frac{4}{5} \left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \lambda$$

de la valeur N peut donc s'écrire

$$\frac{4}{5} \left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_4(m).$$

Les deux autres termes

$$\frac{8}{5} n^2 \mu - \frac{64}{5} \nu$$

peuvent être remplacés par ce terme unique

$$\frac{16}{5} \sum (s^4 - 3s^2 s'^2)$$

où la somme

$$\sum$$

porte sur les entiers s, s' (positifs, nuls ou négatifs) qui figurent dans l'équation

$$n = s^2 + s'^2.$$

Je supprime la démonstration, qui du reste est facile.

La formule qui résulte de ces changements divers, savoir

$$N = \frac{4}{5} \left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_4(m) + \frac{16}{5} \sum (s^4 - 3s^2 s'^2)$$

est celle que j'ai d'abord obtenue; je l'ai mise ensuite sous une forme plus commode pour le calcul. La somme

$$\sum (s^4 - 3s^2 s'^2)$$

qu'on y rencontre est tantôt positive, tantôt négative. Elle change de signe et acquiert une valeur numérique quadruple quand l'exposant α (dans l'équation $n = 2^\alpha m$) augmente d'une unité, m ne changeant pas. De là une relation simple entre les valeurs

$$N(2^\alpha m), N(2^{\alpha+1} m)$$

de N , qui répondent aux entiers respectifs

$$2^\alpha m, 2^{\alpha+1} m.$$

On a, en effet,

$$N(2^{\alpha+1} m) + 4N(2^\alpha m) = \left[16^{\alpha+2} + 4(-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_4(m),$$

équation dont on pourra tirer parti.

4. Je vais dire en peu de mots comment j'ai été conduit à l'équation

$$N = \frac{4}{5} \left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_4(m) + \frac{16}{5} \sum (s^4 - 3s^2s'^2),$$

que j'écris plus explicitement

$$N(2^\alpha m, 10) = \frac{4}{5} \left[16^{\alpha+1} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_4(m) + \frac{16}{5} \sum (s^4 - 3s^2s'^2),$$

et dont je possède maintenant cinq à six démonstrations différentes.

En désignant par

$$N(n, p, q)$$

le nombre des représentations de l'entier n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \dots$) en p carrés dont les q premiers sont impairs et à racines positives, tandis que les suivants sont pairs et à racines indifféremment positives, nulles ou négatives, j'ai donné (dans le cahier d'octobre 1861, p. 370-371) une formule générale comprenant comme cas particulier celle-ci :

$$2^{4\alpha} \rho_4(m) = N(2^{\alpha+2} m, 10, 4) + 4N(2^{\alpha+2} m, 10, 8).$$

Une autre formule générale que je n'ai pas encore communiquée au public, mais qui m'est connue depuis longtemps et qui sort d'une source semblable, m'avait appris d'autre part que l'on a aussi

$$4(-1)^{\frac{m-1}{2}} \rho_4(m) = 5N(2^\alpha m, 10) - 96N(2^{\alpha+2} m, 10, 4) \\ + 256N(2^{\alpha+2} m, 10, 8),$$

en désignant comme tout à l'heure par

$$N(2^\alpha m, 10)$$

le nombre des représentations de l'entier $2^\alpha m$ sous la forme d'une somme de dix carrés quelconques. Mais il me fallait une troisième équation entre

$$N(2^\alpha m, 10), \quad N(2^{\alpha+2} m, 10, 4), \quad N(2^{\alpha+2} m, 10, 8)$$

pour en conclure la valeur de ces trois quantités et spécialement celle tant cherchée de $N(2^{\alpha}m, 10)$. Or j'en suis resté longtemps aux deux équations ci-dessus. Enfin, au même moment pour ainsi dire, par deux voies différentes, l'une toute spéciale, l'autre générale, j'ai reconnu que

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 4) - 16N(2^{\alpha+2}m, 10, 8) = \frac{1}{2} \sum (s^4 - 3s^2s'^2),$$

la somme

$$\sum (s^4 - 3s^2s'^2)$$

étant celle que j'ai introduite plus haut et qui est relative à l'équation

$$2^{\alpha}m = s^2 + s'^2.$$

Mes formules se trouvant ainsi complétées, j'ai eu non-seulement la valeur de

$$N(2^{\alpha}m, 10),$$

mais en outre celles de

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 4)$$

et de

$$N(2^{\alpha+2}m, 10, 8),$$

qu'on formera facilement.

