

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le
déterminant changé de signe est > 0 et $\equiv 3 \pmod{8}$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 11 (1866), p. 191-192.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__191_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est > 0 et $\equiv 3 \pmod{8}$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier k positif et $\equiv 3 \pmod{8}$, soit N le nombre des classes de formes quadratiques proprement primitives dont le déterminant est égal à $-k$. Considérons successivement les diverses formes qui représentent ces classes, et pour chacune d'elles cherchons les deux plus petits nombres impairs a, a' qu'elle exprime proprement, a' étant supposé $> a$, puis effectuons le produit

$$a(a' - a),$$

enfin calculons la somme

$$\sum a(a' - a)$$

pour les N formes indiquées. J'ai reconnu que l'on a toujours

$$\sum a(a' - a) = \frac{2}{3} Nk.$$

La démonstration est facile : je laisse à nos jeunes lecteurs le plaisir de la trouver d'eux-mêmes.

Soit, par exemple, $k = 3$; on n'a alors que la seule forme

$$x^2 + 3y^2,$$

pour laquelle $a = 1, a' = 3$. La vérification est immédiate.

Pour $k = 11$, on a trois formes

$$x^2 + 11y^2, \quad 3x^2 + 2xy + 4y^2, \quad 3x^2 - 2xy + 4y^2,$$

et trois systèmes a, a' , savoir :

$$a = 1, \quad a' = 11; \quad a = 3, \quad a' = 5; \quad a = 3, \quad a' = 5.$$

De là

$$\sum a(a' - a) = 1.10 + 2.3 + 2.3 = 22.$$

D'un autre côté,

$$\frac{2}{3} Nk = \frac{2}{3} . 3 . 11 = 22.$$

Notre théorème est donc encore vérifié cette fois.

Il l'est également pour $k = 19$. Aux trois formes

$$x^2 + 19y^2, \quad 4x^2 + 2xy + 5y^2, \quad 4x^2 - 2xy + 5y^2,$$

qui se présentent alors, répondent les trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 19; \quad a = 5, \quad a' = 7; \quad a = 5, \quad a' = 7,$$

de façon que 38 est la valeur commune des deux quantités

$$\sum a(a' - a)$$

et

$$\frac{2}{3} Nk.$$

Enfin cette valeur commune est 54, lorsqu'on a $k = 27$, ce qui amène les trois formes

$$x^2 + 27y^2, \quad 4x^2 + 2xy + 7y^2, \quad 4x^2 - 2xy + 7y^2,$$

auxquelles répondent les trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 27; \quad a = 7, \quad a' = 9; \quad a = 7, \quad a' = 9.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exercices numériques.

