

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 10 (1865), p. 71-72.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__71_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n , on demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions que l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

comporte en y prenant pour x, y, z, t, u, v des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Cette question se rattache à celle dont nous avons parlé dans l'article précédent. Mettant donc n sous la forme $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$, nous introduirons d'abord la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

ou

$$\rho_2(m),$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. De plus, nous pourrions avoir à considérer les décompositions de m fournies par l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

i étant supposé entier positif, s positif, nul ou négatif; il faudra alors

compter le nombre $\rho(m)$ de ces décompositions et calculer la somme

$$\sum i^2.$$

Mais cela ne sera nécessaire que quand il s'agira de

$$N(4g + 1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2).$$

Dans les autres cas, la fonction $\rho_2(m)$ suffit.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair m . Cet entier pourra être de la forme $4g + 1$ ou de la forme $4g + 3$. Or on a évidemment

$$N(4g + 3 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 0.$$

Supposons donc

$$m = 4g + 1.$$

Alors on voit sans peine que la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est double de celle de

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2).$$

Dans le cas de $m = 4g + 1$, on a donc

$$N(m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2\rho_2(m) + 4 \sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Soit ensuite $\alpha = 1$, en sorte qu'on ait à s'occuper d'un entier impairement pair $2m$. Ce cas est résolu par la formule très-simple

$$N(2m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Enfin, pour le cas d'un entier pairement pair, c'est-à-dire de $\alpha > 1$, l'on a

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4 \left[4^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right] \rho_2(m).$$

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.

