

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

DELAUNAY

**Sur l'existence d'une cause nouvelle ayant une influence sensible  
sur la valeur de l'équation séculaire de la Lune**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 10 (1865), p. 401-411.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1865\\_2\\_10\\_\\_401\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__401_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'EXISTENCE D'UNE CAUSE NOUVELLE  
*ayant une influence sensible sur la valeur de l'équation séculaire  
de la Lune;*

PAR M. DELAUNAY.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI,  
séance du 11 décembre 1865.

L'uniformité du mouvement de rotation de la Terre, ou, ce qui revient au même, la constance de la durée du jour sidéral, a été admise jusqu'à présent par tous les astronomes. C'est sur cette uniformité de la rotation de notre globe qu'est basée la mesure du temps en Astronomie. On s'est bien préoccupé, il est vrai, de l'influence que la variabilité du jour sidéral pourrait avoir sur les théories astronomiques; on a même signalé certaines causes qui pourraient produire cette variabilité, telles que le refroidissement progressif de la Terre, d'où résulterait une accélération de son mouvement de rotation, et la résistance de l'éther au milieu duquel la Terre tourne, résistance qui amènerait au contraire un ralentissement de ce mouvement. Mais toutes les particularités des mouvements des corps célestes ayant pu être expliquées sans l'intervention de la variabilité de la durée prise pour unité de temps, on avait été conduit à admettre que cette variabilité n'existait pas, ou du moins qu'elle était trop petite pour donner lieu à des conséquences appréciables. C'est ainsi que Laplace dit [\*]: « Il est donc certain que, depuis Hipparque, la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde » (centésimale). Puis il ajoute: « Si par des causes quelconques inconnues cette durée éprouvait quelque

[\*] *Mécanique céleste*, t. V, p. 362.

Tome X (2<sup>e</sup> série). — DÉCEMBRE 1865.

altération sensible, on le reconnaîtrait par le mouvement de la Lune, dont les observations, d'ailleurs si utiles, acquièrent par cette considération une nouvelle importance. »

Il est aisé de se rendre compte de la modification apparente qu'éprouverait le mouvement de la Lune autour de la Terre, si la durée du jour sidéral était affectée, par exemple, d'une augmentation progressive, par suite d'un ralentissement du mouvement de rotation de la Terre. Le jour sidéral se trouvant plus long maintenant qu'à l'époque des anciennes observations, la Lune parcourrait, pendant la durée agrandie de ce jour, une portion de son orbite plus grande que celle qu'elle aurait parcourue pendant le même jour s'il avait conservé la valeur qu'il avait anciennement. De sorte que, pour l'astronome qui ferait abstraction de l'augmentation de la durée du jour sidéral, la Lune semblerait parcourir dans le même temps un plus long chemin sur son orbite, c'est-à-dire que son mouvement autour de la Terre paraîtrait se faire plus rapidement. Une accélération apparente du moyen mouvement de la Lune serait donc la conséquence naturelle de l'augmentation progressive de la durée du jour sidéral. Il est bien clair que la Lune n'est pas le seul astre dont le mouvement semblerait modifié par une variation dans la durée que nous prenons pour unité de temps : tous les autres astres éprouveraient une modification analogue dans leurs mouvements. Mais cette modification doit être évidemment d'autant plus grande que le mouvement de l'astre est plus rapide ; et c'est pour cette raison qu'une pareille altération de la durée du jour sidéral se manifesterait surtout dans le mouvement de la Lune.

La question de l'équation séculaire de la Lune, qui, comme on sait, a tant préoccupé les astronomes dans ces derniers temps, a ramené l'attention sur la possibilité d'une variation du jour sidéral. On se souvient que Halley, en comparant les observations modernes aux anciennes, a signalé l'existence d'une accélération séculaire dans le moyen mouvement de la Lune ; que Laplace a reconnu que cette accélération séculaire de la Lune était due à la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre ; que la valeur de l'équation séculaire de la Lune, produite par la cause que Laplace avait trouvée, a été regardée pendant longtemps comme présentant un suffisant accord

avec les indications fournies par les observations; que récemment M. Adams, en rectifiant le calcul de l'équation séculaire due à cette cause, a montré que la vraie valeur de cette équation séculaire est notablement plus petite qu'on ne l'avait cru avant lui; que le résultat obtenu par M. Adams, vivement attaqué à diverses reprises, a été, par suite même de ces attaques, confirmé de la manière la plus complète par les recherches de divers savants employant pour cela des méthodes essentiellement différentes; que cependant une valeur de l'équation séculaire de la Lune, à peu près double de celle que produit la cause assignée par Laplace, a été soumise au contrôle des anciennes éclipses dont il est fait mention dans l'histoire, et qu'il en est résulté de fortes raisons de croire que cette valeur plus grande de l'équation séculaire de la Lune est bien celle qui doit être attribuée à notre satellite pour être complètement d'accord avec l'observation. S'il est vrai que, conformément à ce que je viens de rappeler, l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune indiquée par les observations soit notablement plus grande que celle qu'occasionne la variation de l'excentricité de l'orbite de la Terre, il devient nécessaire de chercher une nouvelle cause à laquelle on puisse attribuer la partie excédante de l'accélération séculaire dont il s'agit, c'est-à-dire la partie dont la cause trouvée par Laplace ne peut pas rendre compte. Si l'on pense pour cela à une variation de la durée du jour sidéral, il ne peut être question que d'une augmentation de cette durée, c'est-à-dire d'un ralentissement du mouvement de rotation de la Terre. Le refroidissement progressif du globe terrestre ne peut pas nous fournir la solution de la question, puisque ce refroidissement produirait un effet tout opposé.

Bien que je ne fusse pas entièrement convaincu que la valeur ( $6'',11$ ) de l'équation séculaire de la Lune, due à la cause que Laplace a trouvée, fût réellement incompatible avec les anciennes éclipses historiques, ainsi que je l'ai expliqué dans mon *Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune*, inséré dans la *Connaissance des Temps* de 1864, j'ai beaucoup réfléchi à la manière dont on pourrait expliquer le désaccord entre la théorie et l'observation, en admettant que ce désaccord fût complètement mis hors de doute. Je suis heureux de pouvoir annoncer aujourd'hui à l'Académie que j'ai réussi à découvrir une

nouvelle cause à laquelle il est très-naturel d'attribuer la portion de l'accélération lunaire qui n'est pas produite par la cause assignée par Laplace. Cette cause nouvelle que j'ai trouvée détermine un ralentissement progressif du mouvement de rotation de la Terre, et par suite occasionne une accélération apparente du moyen mouvement de la Lune. Voici en quoi elle consiste.

On sait que la Lune, par son action sur les eaux de la mer, détermine dans ces eaux un mouvement d'oscillation qui constitue le phénomène des *marées*. Le Soleil concourt à la production de ce phénomène; mais je n'en parlerai pas, afin d'éviter une complication inutile. La forme de la surface de la mer changeant ainsi continuellement, il en résulte que l'action de la Lune sur la masse entière de la Terre (en y comprenant les eaux de la mer) est à chaque instant un peu différente de ce qu'elle serait si le phénomène des marées n'existait pas; en cherchant à se rendre compte de la différence, on reconnaît qu'elle *consiste principalement en un couple qui agit constamment sur la Terre, en sens contraire de son mouvement de rotation*, d'où résulte nécessairement une diminution progressive de la vitesse angulaire du globe terrestre. C'est ce que je vais tâcher de faire comprendre.

Imaginons d'abord que la Terre soit entièrement recouverte par les eaux de la mer. En vertu de l'action de la Lune, les eaux tendent à s'élever au-dessus de leur niveau moyen, dans les deux régions opposées situées aux extrémités du diamètre terrestre qui est dirigé vers le centre de la Lune. Admettons, pour simplifier le langage, que, sans cette action de la Lune, la surface de la mer serait exactement sphérique, et supposons de plus que la Lune soit sur l'équateur céleste; en vertu de l'action lunaire, la surface de la mer tend à prendre à chaque instant la forme d'un ellipsoïde de révolution de même centre que la sphère, ayant son axe dirigé suivant la ligne qui va du centre de la Terre au centre de la Lune. Le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même fait que cet ellipsoïde, suivant lequel les eaux de la mer tendent à chaque instant à se mettre en équilibre, tourne par rapport au globe terrestre exactement comme la Lune dans son mouvement diurne, puisque son axe prolongé va toujours passer par le centre de la Lune. Mais ce déplacement continu de l'ellipsoïde d'équilibre dont nous venons de parler fait que la surface des eaux de la mer ne

vient jamais coïncider avec lui; les frottements et résistances de toutes sortes que les eaux éprouvent dans leur mouvement, font que la surface allongée que présente à chaque instant l'ensemble de ces eaux est constamment *en retard* sur la position de l'ellipsoïde d'équilibre avec lequel elle tend à coïncider. Sans ce retard, la pleine mer aurait lieu partout au moment du passage de la Lune au méridien, supérieur ou inférieur; en vertu de ce retard dû aux résistances que les eaux ont à vaincre, la pleine mer n'arrive pas au moment même du passage de la Lune au méridien, mais bien quelque temps après ce passage.

Si nous passons du cas hypothétique où nous nous sommes placés au cas de la nature où les eaux de la mer ne recouvrent que partiellement la surface du globe terrestre, nous trouverons une grande différence. Les mers étant toutes en communication les unes avec les autres (il ne s'agit bien entendu que des grandes mers), la surface ellipsoïdale d'équilibre dont nous avons parlé reste la même; mais la présence des continents interposés entre ces mers, en gênant considérablement le mouvement en vertu duquel les eaux tendent à se disposer suivant cette surface ellipsoïdale, change complètement la forme que la surface des eaux prend à chaque instant; au lieu d'une figure d'ensemble allongée comme l'ellipsoïde d'équilibre avec lequel elle tend à coïncider, on a une figure très-irrégulière résultant des mouvements d'oscillation que la Lune produit dans les diverses parties de l'Océan, et qui se combinent les uns avec les autres par la propagation successive de chacun de ces mouvements partiels dans les mers environnantes. Mais quelle que soit l'irrégularité d'ensemble que présente la surface totale des eaux répandues sur le globe terrestre, l'existence des frottements et des résistances de toutes sortes que les eaux éprouvent dans leurs mouvements amène un résultat analogue à celui que nous avons indiqué dans le cas simple que nous avons examiné tout d'abord. Ce mouvement oscillatoire général présente dans tous ses détails un certain retard sur ce qu'il serait sans l'existence des résistances dont nous venons de parler: si l'on s'en tient aux traits généraux, c'est pour ainsi dire le mouvement oscillatoire que prendrait la mer, si ces résistances n'existaient pas, et que la Lune fût placée dans le ciel d'une certaine quantité en arrière de la position qu'elle occupe réellement, eu égard au sens de son mouvement diurne apparent.

Revenons au cas simple où la mer recouvre la Terre de toutes parts, et voyons comment l'action de la Lune sur la masse totale de la Terre est modifiée par suite de la forme allongée que cette même action de la Lune fait prendre à la surface de la mer. En vertu de cette forme, il existe comme deux protubérances liquides situées vers les extrémités d'un diamètre terrestre qui se dirige, non pas vers la Lune même, mais vers un point du ciel situé à une certaine distance de cet astre, du côté de l'orient. Ces deux protubérances sont inégalement éloignées de la Lune; l'une d'elles est plus près de ce corps attirant que le centre de la Terre, et l'autre en est au contraire plus éloignée. Si l'on se reporte à la manière dont on obtient la portion de l'action lunaire qui occasionne le phénomène des marées, on verra que la première de ces protubérances est comme attirée par la Lune, et la seconde, au contraire, comme repoussée par le même astre : il en résulte donc un couple appliqué à la masse du globe terrestre, et tendant à le faire tourner en sens contraire du sens dans lequel il tourne réellement, couple qui doit produire d'après cela un ralentissement dans la rotation de ce globe [\*].

Imaginons, pour fixer les idées, que le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien soit de trois heures, ce qui exige que le diamètre aux deux extrémités duquel sont les deux protubérances liquides fasse un angle de 45 degrés avec la ligne allant du centre de la Terre au centre de la Lune, et calculons l'effet que produira le couple dont nous venons de parler, en remplaçant les deux protubérances liquides par deux points matériels situés aux deux extrémités du diamètre oblique qui leur correspond.

---

[\*] J'apprends que cette idée d'une résistance que la Lune oppose continuellement au mouvement de rotation de la Terre, par suite de son action sur les eaux de la mer, a déjà été formulée dans certains ouvrages imprimés. Il y est dit en même temps que l'effet produit par cette résistance est trop petit pour être sensible. Je ferai remarquer à cette occasion que la Note que j'ai lue à l'Académie a eu pour objet, non pas de faire connaître cette cause du ralentissement de la rotation de la Terre, mais bien de montrer : 1<sup>o</sup> que le ralentissement qui en résulte est loin d'être insensible; 2<sup>o</sup> qu'on peut y voir l'explication complète de la partie de l'équation séculaire de la Lune dont la cause assignée par Laplace ne peut rendre compte.

Désignons par T le centre de la Terre; par L le centre de la Lune; par E l'extrémité du rayon de l'équateur terrestre faisant un angle de 45 degrés avec la ligne TL, du côté de l'orient; et par E' le point diamétralement opposé de cet équateur. Soient M la masse totale de la Terre,  $m$  la masse de la Lune, et  $\mu$  celle de chacun des points matériels que nous supposons placés en E et en E'. Soient en outre R la distance TL supposée constante du centre de la Terre au centre de la Lune,  $r$  le rayon terrestre TE ou TE', et  $d$  la distance LE de la Lune au point E. Si nous appelons  $f$  l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance, nous aurons

$$\frac{fm\mu}{d^2}$$

pour l'attraction de la Lune sur le point matériel de masse  $\mu$  placé en E. Pour rapporter le mouvement du globe terrestre à des axes de directions constantes passant par son centre de gravité, nous devons joindre à la force précédente la force d'inertie d'entraînement de la masse  $\mu$ , force d'inertie qui a pour expression

$$\frac{fm\mu}{R^2}$$

et qui est dirigée parallèlement à la ligne LT, dans le sens indiqué par l'ordre des deux lettres L, T. Nous avons d'ailleurs

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos 45^\circ = R^2 + r^2 - \sqrt{2} Rr.$$

C'est la résultante des deux forces dont nous venons de donner l'expression qui constitue l'action relative de la Lune sur la masse  $\mu$  placée en E. Si nous prenons la somme des moments de ces deux forces par rapport au centre de la Terre, nous trouverons

$$\frac{3}{2} \frac{fm\mu r^2}{R^3},$$

en négligeant des termes petits par rapport à celui-là. Ce moment tend à faire tourner la Terre dont la masse  $\mu$  fait partie, d'orient en



occident, c'est-à-dire en sens contraire du mouvement de rotation dont la Terre est animée. Une expression exactement pareille représentera le moment analogue et de même sens relatif à la seconde masse  $\mu$  placée en  $E'$ . Le moment total, dû à l'action de la Lune sur ces deux masses  $\mu$  placées en  $E$  et en  $E'$ , et tendant à ralentir le mouvement de rotation du globe terrestre, a donc pour valeur

$$3 \frac{fm\mu r^2}{R^3};$$

et par suite l'équation différentielle de ce mouvement de rotation est

$$\frac{d\omega}{dt} = -3 \frac{fm\mu r^2}{IR^3},$$

en appelant  $\omega$  la vitesse angulaire de la Terre, et  $I$  le moment d'inertie de la masse terrestre par rapport à un de ses diamètres. Admettons pour simplifier que la Terre soit homogène, et nous aurons

$$I = \frac{2}{5} Mr^2.$$

Remarquons en outre que, par la considération du mouvement de la Lune autour de la Terre, on a, en négligeant  $m$  par rapport à  $M$ ,

$$f = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M},$$

$\pi$  étant le rapport de la circonférence au diamètre, et  $T$  la durée de la révolution sidérale de la Lune. Si nous introduisons ces valeurs de  $I$  et  $f$  dans notre équation différentielle, elle deviendra

$$\frac{d\omega}{dt} = -30 \frac{\pi^2}{T^2} \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{\mu}{M}.$$

On en déduit immédiatement, par une double intégration, que l'angle total dont la Terre tourne pendant un temps quelconque  $t$  est plus petit qu'il ne serait sans cette action de la Lune sur les deux masses  $\mu$ ,

d'une quantité A donnée par l'expression

$$A = 15\pi^2 \frac{m}{M} \cdot \frac{\mu}{M} \cdot \frac{t^2}{T^2}.$$

Cherchons maintenant quelle valeur il faudrait attribuer à chacune de ces masses  $\mu$  pour que le retard A dans la rotation du globe terrestre, correspondant à un temps  $t$  égal à un siècle, donnât lieu à une accélération séculaire apparente de la Lune égale à 6 secondes (c'est à peu près la valeur de la portion de l'équation séculaire de la Lune dont la cause trouvée par Laplace ne peut rendre compte). Il faut pour cela supposer A égal à l'angle dont la Terre tourne sur elle-même, pendant que la Lune s'avance de 6 secondes dans son mouvement moyen autour de la Terre; A sera donc égal à 6 secondes multiplié par  $27\frac{1}{3}$ , ou à 164 secondes. En faisant le calcul, dont il est inutile de donner ici les détails, et adoptant  $\frac{1}{80}$  pour le rapport de la masse de la Lune à la masse de la Terre, on trouve

$$\mu = \frac{1}{416000000} M.$$

Pour mieux saisir la grandeur de cette masse  $\mu$ , imaginons que ce soit la masse d'un certain volume V d'eau, et cherchons la valeur de ce volume en mètres cubes. En adoptant 5,5 pour la densité moyenne de la Terre, on trouvera sans peine

$$V = 142900000000 \text{ mètres cubes.}$$

Concevons enfin que cette masse d'eau de volume V ait la forme d'une couche plane à base circulaire d'une épaisseur uniforme de 1 mètre, et nous verrons que le rayon de la base de cette couche sera d'environ 675 kilomètres; c'est-à-dire qu'une pareille couche, appliquée sur la surface du globe terrestre, y occuperait une largeur d'environ 12 degrés de l'équateur. Les proportions de cette couche d'eau sont évidemment comparables à celles des protubérances liquides que l'action de la Lune produirait dans le cas hypothétique où nous nous sommes placés.

En présence d'un pareil résultat, bien qu'il ait été obtenu dans une hypothèse qui diffère beaucoup de la réalité, il est impossible de ne pas admettre qu'un effet analogue, d'une grandeur sensible, soit produit par l'action de la Lune sur les eaux de l'Océan.

Le Soleil, qui contribue pour sa part à la production du phénomène des marées, quoique dans une proportion moindre que la Lune, doit également contribuer à cette diminution progressive de la vitesse de rotation de la Terre.

D'après les explications dans lesquelles nous venons d'entrer, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

*Les forces perturbatrices auxquelles sont dues les oscillations périodiques de la surface des mers (phénomène des marées), en exerçant leur action sur les intumescences liquides qu'elles occasionnent, déterminent un ralentissement progressif du mouvement de rotation de la Terre, et produisent ainsi une accélération apparente sensible dans le moyen mouvement de la Lune.*

Le résultat auquel nous venons de parvenir est en désaccord avec ce que Laplace a trouvé en cherchant l'influence que l'état de fluidité des eaux de la mer peut avoir sur le mouvement du globe terrestre considéré dans son ensemble. Laplace dit formellement que cet état de fluidité de la mer n'altère pas l'uniformité du mouvement de rotation du globe (*Mécanique céleste*, livre V). Mais il faut remarquer que, pour arriver à cette conséquence, Laplace s'en tient aux quantités qui sont du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices considérées : il lui était donc impossible de trouver le ralentissement du mouvement de rotation dont nous venons d'établir l'existence réelle, puisque ce ralentissement est évidemment de l'ordre du carré des forces perturbatrices dont il s'agit.

Pour pouvoir calculer exactement la valeur de ce ralentissement progressif de la rotation de la Terre, dû aux actions combinées de la Lune et du Soleil sur les eaux de la mer, il faudrait posséder une connaissance complète de toutes les circonstances que présente le phénomène des marées, non-seulement le long des côtes, mais encore pour tous les points de la surface des mers. Ce calcul direct est à peu près impossible à réaliser. Ce n'est donc que par un moyen détourné que l'on peut espérer obtenir la valeur de ce ralentissement. La

détermination aussi exacte que possible de la valeur de l'équation séculaire de la Lune par les observations conduira à ce résultat. L'importance d'une connaissance précise de la variation séculaire de la durée du jour sidéral rend donc plus grand encore l'intérêt qui s'attache aux comparaisons des Tables lunaires avec les anciennes observations d'éclipses, en vue d'arriver à bien fixer la vraie valeur de l'équation séculaire de la Lune.

