

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 10 (1865), p. 21-24.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__21_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, est liée intimement à la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

que nous avons considérée dans l'article précédent. Pour le mieux comprendre, on remplacera la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2,$$

par la forme équivalente

$$x^2 + 9y^2 + z^2 + 9t^2,$$

et l'on remarquera que les deux formes binaires

$$x^2 + 9y^2, \quad 2x^2 + 2xy + 5y^2,$$

distinctes il est vrai, appartiennent néanmoins au même déterminant — 9. On ne s'étonnera donc pas que le nombre $B(n)$ des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$$

se rattache au nombre analogue $A(n)$ qui répond à la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2.$$

2. Posons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et parcourons les divers cas qui peuvent se présenter relativement aux exposants α, β .

D'abord, on prouve sans peine que, sous la seule condition de $\alpha > 0$, l'on a

$$B(2^\alpha 3^\beta m) = A(2^\alpha 3^\beta m).$$

Aux formules (1) et (3) de l'article précédent répondent donc les deux formules ci-après :

1° Pour α et $\beta > 0$,

$$B(2^\alpha 3^\beta m) = 12(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m),$$

de sorte qu'en particulier

$$B(3 \cdot 2^\alpha m) = 0;$$

2° Pour $\beta = 0$, mais $\alpha > 0$,

$$B(2^\alpha m) = 4\zeta_1(m).$$

Le cas d'un entier impair multiple de 3 n'est guère plus difficile, et je trouve que, sous la condition de $\beta > 0$, l'on a

$$B(3^\beta m) = 4(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m).$$

Le second membre est nul quand $\beta = 1$. Mais il ne l'est jamais pour $\beta > 1$, et l'on a, par exemple,

$$B(9) = 8,$$

résultat confirmé par les identités

$$\begin{aligned} 9 &= 2.1^2 + 2.1.1 + 5.1^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2, \\ 9 &= 2(-1)^2 + 2(-1)(-1) + 5(-1)^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2, \\ 9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2.1^2 + 2.1.1 + 5.1^2, \\ 9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(-1)^2 + 2(-1)(-1) + 5(-1)^2, \\ 9 &= 2(-2)^2 + 2(-2).1 + 5.1^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2, \\ 9 &= 2(2)^2 + 2.2(-1) + 5(-1)^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2, \\ 9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(-2)^2 + 2(-2).1 + 5.1^2, \\ 9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(2)^2 + 2.2(-1) + 5(-1)^2, \end{aligned}$$

qui contiennent toutes les représentations dont l'entier 9 est susceptible sous la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2.$$

5. Nous n'avons plus à parler que des entiers m impairs et premiers à 3. Mais je n'ai jusqu'à présent obtenu à ce sujet que l'équation suivante :

$$A(m) + 2B(m) = 4\zeta_1(m).$$

Il est vrai que cette équation détermine

$$B(m)$$

quand m est de la forme

$$6l - 1;$$

car, sachant déjà que

$$A(6l - 1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l - 1),$$

nous pouvons en conclure que l'on a également

$$B(6l - 1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l - 1).$$

Mais, quand m est de la forme

$$6l + 1,$$

nous n'avons que la seule équation

$$A(6l + 1) + 2B(6l + 1) = 4\zeta_1(6l + 1)$$

entre les deux inconnues

$$A(6l + 1)$$

et

$$B(6l + 1).$$

Il reste donc à obtenir une seconde équation pour arriver à un résultat

définitif. J'ai cru pourtant que la formule

$$A(6l+1) + 2B(6l+1) = 4\zeta_4(6l+1)$$

méritait d'être indiquée indépendamment de ce que l'on pourra trouver plus tard. On la vérifiera sur les nombres 1, 7, 13, au moyen des valeurs suivantes

$$A(1) = 4, \quad B(1) = 0,$$

$$A(7) = 0, \quad B(7) = 16,$$

$$A(13) = 24, \quad B(13) = 16,$$

qu'il est aisé de former directement.

