JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 1-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

SUR LA FORME

$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Nous avons démontré dans ce journal (cahier de janvier 1859, p. 47) que tout entier n différent de 3 peut être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Mais personne, que je sache, n'a trouvé jusqu'ici une expression simple et générale du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

des représentations dont n est susceptible sous la forme citée, c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

dans laquelle x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Je veux traiter aujourd'hui cette question délicate, mais pour le cas seulement d'un entier n pair. Le cas de n impair offre, en effet, des difficultés spéciales que je n'ai pas encore pu vaincre complétement. On verra néanmoins qu'il suffirait d'avoir réussi pour les entiers premiers à 5. De là on passerait sans peine aux multiples de 5.

2. Mettons en évidence les facteurs 2 et 5 que n peut contenir et pour cela écrivons

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant un entier impair, premier à 5. Supposons

$$\alpha > 0,$$

afin que n soit pair, mais faisons successivement $\beta = 0$, puis $\beta > 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier $2^\alpha m$ pair et premier à 5, le résultat que j'obtiens est d'une extrême simplicité. La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

s'exprime en effet par le quadruple de la somme des diviseurs de m. En d'autres termes, on a, d'après une notation dont j'ai fait bien souvent usage dans ce journal,

$$(1) \qquad \mathrm{N}\,(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4\zeta_1(m).$$

Dans le second cas, le facteur 4 est remplacé par un facteur dépendant de β, savoir

$$2\,(5^{\beta+1} - 3).$$

Ainsi on a

$$(2) \quad \mathrm{N}\,(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 2\,(5^{\beta+1} - 3)\,\zeta_1(m).$$

La formule (2) comprend la formule (1) à laquelle elle se réduit quand on fait $\beta = 0$. L'exposant α n'y joue aucun rôle; mais il ne faut pas oublier que l'on suppose cet exposant > 0.

3. Appliquons les formules (1) et (2) à quelques exemples; et d'abord prenons $\alpha = 1$ avec $m = 1$ dans la formule (1). Elle nous donnera

$$N(2 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4,$$

résultat confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2$$

qui fournit pour l'entier 2 quatre représentations sous la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Avec $\alpha = 1$, soit $m = 3$ dans cette même formule (1). Nous trouverons

$$N(6 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 16,$$

ce qui est exact en vertu des identités

$$\begin{aligned} 6 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2, \\ 6 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2, \\ 6 &= (\pm 1)^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2, \\ 6 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2, \end{aligned}$$

de chacune desquelles on déduit quatre représentations de l'entier 6.

Soit encore $\alpha = 2$, avec $m = 1$. La formule (1) nous donnera cette fois

$$N(4 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 4,$$

et la vérification résultera des deux identités

$$\begin{aligned} 4 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5.0^2, \\ 4 &= 0^2 + (\pm 2)^2 + 5.0^2 + 5.0^2. \end{aligned}$$

Passant à la formule (2), prenons maintenant $\beta = 1$, avec $\alpha = 1$ et $m = 1$. Nous obtiendrons

$$N(10 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 44.$$

Les identités à employer sont ici :

$$
\begin{aligned}
10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,\\
10 &= (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,\\
10 &= (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,\\
10 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2,\\
10 &= (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2,\\
10 &= 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2.
\end{aligned}
$$

On en tire successivement quatre, quatre, huit, huit, huit, huit, et enfin quatre représentations de l'entier 10 par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Or

$$4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 4 = 44;$$

la vérification cherchée a donc lieu. Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

4. On ne peut pas faire $\alpha = 0$ dans les formules (1) et (2); et je n'ai trouvé aucune formule véritablement simple pour calculer

$$\mathrm{N}(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Mais je puis montrer du moins que de la valeur de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2)$$

on conclut sans peine celle de

$$\mathrm{N}(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Mettons en évidence la seule variable de la question, savoir β, en écrivant

$$\mathrm{N}(5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \mathrm{F}(\beta),$$

de manière que

$$F(0) = N(m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

On donne donc

$$F(0)$$

et on demande

$$F(\beta).$$

Or je trouve qu'il existe entre deux fonctions consécutives

$$F(\beta),\ F(\beta+1)$$

la relation suivante

$$F(\beta+1) + F(\beta) = 4(5^{\beta+1} - 1)\zeta_1(m).$$

C'est une équation aux différences finies très-facile à intégrer. On en tire

$$(3)\qquad F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta\left[F(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right],$$

et la question proposée est résolue.

5. Pour $m = 1$, on a

$$F(0) = 4;$$

c'est ce qui résulte des deux identités

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2.$$

La valeur correspondante de

$$F(\beta)$$

sera donc

$$F(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes

$$N(5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

Par exemple, on a

$$N(5 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 12,$$

résultat confirmé par les identités

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 5.0^2 + 5.0^2,$$
$$5 = 0^2 + 0^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2,$$
$$5 = 0^2 + 0^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2.$$

L'entier 3 est le seul qui ne puisse pas être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

Pour $m = 3$, on a donc

$$F(0) = 0,$$

d'où

$$F(\beta) = \frac{8}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autre termes

$$N(5^\beta.3 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = \frac{8}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

Par exemple, on doit avoir

$$N(15 = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2) = 64;$$

et on vérifiera sans peine qu'il en est effectivement ainsi.

Pour $m = 7$, les identités

$$7 = (\pm 1) + (\pm 1)^2 + 5(\pm 1)^2 + 5.0^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 5.0^2 + 5(\pm 1)^2$$

donnent

$$F(0) = 16,$$

par conséquent

$$F(\beta) = \frac{16}{3}(5^{\beta+1} - 3) + \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

En d'autres termes, on a

$$\mathrm{N}\left(7.5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right) = \frac{16}{3}\left(5^{\beta+1} - 3\right) + \frac{16}{3}(-1)^\beta.$$

Enfin, pour $m = 9$, on trouve

$$\mathrm{F}(0) = 20,$$

et par suite

$$\mathrm{F}(\beta) = \frac{26}{3}\left(5^{\beta+1} - 3\right) + \frac{8}{3}(-1)^\beta,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}\left(9.5^\beta = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right) = \frac{26}{3}\left(5^{\beta+1} - 3\right) + \frac{8}{3}(-1)^\beta.$$

Mais en voilà assez sur ces détails.

6. Le rapport si simple que les formules

$$(1)\qquad \mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right) = 4\zeta_1(m)$$

et

$$(2)\qquad \mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right) = 2\left(5^{\beta+1} - 3\right)\zeta_1(m)$$

établissent entre

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right)$$

et

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2\right),$$

dans le cas de $\alpha > 0$, n'existe plus quand $\alpha = 0$. La formule

$$(3)\qquad \mathrm{F}(\beta) = \frac{2}{3}\left(5^{\beta+1} - 3\right)\zeta_1(m) + (-1)^\beta\left[\mathrm{F}(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right]$$

a lieu alors; mais elle conduit à un rapport beaucoup plus compliqué et qui d'ailleurs n'est plus indépendant de m. La formule (3) n'en est pas moins digne de remarque, et nos lecteurs ne me reprocheront pas, j'espère, de la leur avoir communiquée, bien que la valeur de $\mathrm{F}(0)$ reste à trouver pour chaque valeur de m.

Au reste, on verra dans l'article suivant comment la fonction

$$F(\beta)$$

est liée à une autre fonction

$$f(\beta),$$

de nature semblable, mais rapportée à la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

Ce que nous dirons à ce sujet ne sera pas sans intérêt.