

# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans  
la théorie des nombres; dix-huitième article**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 10 (1865), p. 169-176.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1865\\_2\\_10\\_\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__169_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES  
DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIX-HUITIÈME ARTICLE.

1. Ce dix-huitième article pourra être convenablement rapproché du dix-septième, inséré au cahier d'avril. On continue, en effet, à considérer un nombre impair donné

$m$ ,

et les modes de partition qu'on applique, tant au nombre  $m$  qu'à son double, restent les mêmes. Mais les sommes qu'on en déduit et qu'on parvient à lier entre elles sont différentes.

Représentons-nous d'abord l'entier impairement pair  $2m$  comme la somme de deux entiers positifs impairs  $m'$ ,  $m''$ , c'est-à-dire écrivons

$$2m = m' + m'',$$

$m'$  prenant les valeurs successives

$$1, 3, \dots, 2m-3, 2m-1,$$

tandis que  $m''$  prend les valeurs complémentaires

$$2m-1, 2m-3, \dots, 3, 1;$$

puis, décomposons de toutes les manières possibles chacun des entiers  $m'$ ,  $m''$  en un produit de deux facteurs, de manière à avoir

$$m' = d' \delta', \quad m'' = d'' \delta''.$$

Nous arriverons ainsi à l'équation fondamentale

$$2m = d' \delta' + d'' \delta''.$$

De cette équation dérive la somme

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [\mathfrak{F}(d' + d'', \delta' - \delta'') + \mathfrak{F}(d' - d'', \delta' + \delta'')]$$

que nous désignerons, pour abréger, par

$$R'$$

et qui est une de celles dont nous voulons nous occuper. Le signe sommatoire

$$\sum$$

porte sur tous les groupes d'entiers positifs impairs

$$d', \delta', d'', \delta''$$

pour lesquels on a

$$2m = d' \delta' + d'' \delta'',$$

conformément à ce que je viens d'expliquer.

Nous aurions pu diviser la somme  $R'$  en deux parties, savoir

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \mathfrak{F}(d' + d'', \delta' - \delta'')$$

et

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \mathfrak{F}(d' - d'', \delta' + \delta''),$$

dont la première aurait pu, en outre, être remplacée par

$$\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \mathfrak{F}(\delta' + \delta'', d' - d'').$$

Ces changements de forme ont leur utilité; mais nous avons dû fixer les idées en choisissant une expression précise qui pour le moment suffit.

Une fonction

$$\mathfrak{F}(x, y)$$

de deux variables figure dans la somme

$$R'.$$

Cette fonction est jusqu'ici complètement arbitraire; mais plus tard nous l'assujettirons à quelques conditions qui seront mentionnées en temps utile.

2. Il faut maintenant se représenter le nombre  $m$  comme formé de deux parties entières et positives, l'une impaire, l'autre paire, et poser

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

On fera successivement

$$m_1 = 1, \quad m_1 = 3, \dots, \quad m_1 = m - 2;$$

et à chaque valeur de  $m_1$  correspondra une valeur du produit pair  $2^{\alpha_2} m_2$ , où le facteur  $m_2$  est supposé impair. Cette valeur

$$2^{\alpha_2} m_2 = m - m_1$$

déterminera à la fois les deux facteurs  $2^{\alpha_2}$  et  $m_2$ : l'exposant  $\alpha_2$  variera d'un cas à l'autre.

Soit enfin, de toutes les manières possibles en nombres entiers positifs,

$$m_1 = d_1 \delta_1, \quad m_2 = d_2 \delta_2,$$

et nous serons conduits à l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2,$$

d'où nous conclurons la somme nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

que je désignerai, pour abréger, par

$$R_1.$$

La fonction  $\mathcal{F}(x, y)$  est la même que plus haut.

5. C'est entre la somme

$$R'$$

du n° 1 et la somme

$$R_1$$

du n° 2 que nous établissons une liaison par l'intermédiaire d'une troisième somme relative aux diviseurs de l'entier donné  $m$ .

Soit  $d$  un quelconque des diviseurs de  $m$  (dont 1 et  $m$  font toujours partie). La somme dont nous parlons, et que nous désignerons abréviativement par

$$R$$

s'exprimera de cette façon :

$$\sum \mathcal{F}(2d, 0).$$

Je n'ai pas besoin d'ajouter que le signe

$$\sum$$

porte sur toutes les valeurs de  $d$ .

Mais le moment est venu de dire quelles restrictions nous imposons à la généralité absolue de la fonction

$$\mathcal{F}(x, y);$$

car la relation que nous voulons obtenir n'aurait pas lieu pour une fonction quelconque. Désormais donc nous exigeons que cette fonction soit paire par rapport à  $y$ , et impaire par rapport à  $x$ ; autrement dit, nous exigeons que l'on ait d'une part

$$\mathcal{F}(x, -y) = \mathcal{F}(x, y),$$

et d'autre part

$$\mathcal{F}(-x, y) = -\mathcal{F}(x, y),$$

à quoi j'ajoute, comme d'habitude, la condition particulière

$$\mathcal{F}(0, \gamma) = 0.$$

Pour toute fonction algébrique ou numérique remplissant ces conditions, l'on a

$$R' = R + 4R_1,$$

ou bien, explicitement,

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [\mathcal{F}(d' + d'', \delta' - \delta'') + \mathcal{F}(d' - d'', \delta' + \delta'')] \\ &= \sum \mathcal{F}(2d, 0) + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} \mathcal{F}(2d_1, 2^{\alpha_1+1}d_2). \end{aligned}$$

Telle est la formule, curieuse suivant nous, à laquelle j'ai consacré le présent article.

4. Pour  $m = 1$ , l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_1} d_2 \delta_2$$

est impossible; la somme

$$R_1$$

relative à ce mode de partition est donc nulle. D'un autre côté, on ne peut faire

$$m = d\delta,$$

qu'avec

$$d = 1, \quad \delta = 1.$$

Enfin, l'équation

$$2m = d' \delta' + d'' \delta''$$

n'a évidemment lieu qu'en prenant l'unité pour valeur commune de

$$d', \delta', d'', \delta''.$$

De là

$$R = \mathcal{F}(2, 0),$$

et

$$R' = \mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(0, 2),$$

ce qui se réduit à

$$R' = \mathcal{F}(2, 0),$$

attendu que le terme  $\mathcal{F}(0, 2)$  est nul d'après la nature de la fonction  $\mathcal{F}(x, y)$ . L'équation

$$R' = R + 4R,$$

est donc vérifiée.

Pour  $m = 3$ , on a  $m = d\delta$  par  $d = 1, \delta = 3$  et par  $d = 3, \delta = 1$ ; d'où

$$R = \mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(6, 0).$$

L'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{a_2} d_2 \delta_2$$

a lieu alors en faisant

$$d_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad 2^{a_2} d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1;$$

par conséquent

$$R_1 = \mathcal{F}(2, 4).$$

Quant à l'équation

$$2m = d' \delta' + d'' \delta'',$$

elle comporte huit systèmes de solutions compris dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5, \\ d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\ d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\ d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\ d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\ d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\ d' = 1, & \delta' = 5, & d'' = 1, & \delta'' = 1, \\ d' = 5, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 1. \end{array}$$

La somme

$$R'$$

est donc composée de seize termes, savoir :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(2, -4) + \mathcal{F}(0, 6) + \mathcal{F}(6, 0) + \mathcal{F}(-4, 2) \\ & + \mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(0, 6) - \mathcal{F}(4, 2) - \mathcal{F}(-2, 4) \\ & + \mathcal{F}(4, -2) + \mathcal{F}(2, 4) - \mathcal{F}(6, 0) - \mathcal{F}(0, 2) \\ & + \mathcal{F}(2, 4) + \mathcal{F}(0, 6) + \mathcal{F}(6, 0) + \mathcal{F}(4, 2). \end{aligned}$$

Quatre termes sont nuls à cause de l'équation de condition

$$\mathcal{F}(0, y) = 0.$$

Quatre autres

$$\mathcal{F}(-4, 2), -\mathcal{F}(4, 2), \mathcal{F}(4, -2), \mathcal{F}(-4, -2)$$

se détruisent entre eux, attendu que l'on doit avoir

$$\mathcal{F}(-4, 2) = -\mathcal{F}(4, 2), \quad \mathcal{F}(4, -2) = \mathcal{F}(-4, -2).$$

Deux autres termes, le troisième et le onzième, se détruisent identiquement. Restent six termes dont deux forment la somme

$$\mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(6, 0),$$

c'est-à-dire la valeur de R. Les quatre autres

$$\mathcal{F}(2, -4), -\mathcal{F}(-2, 4), \mathcal{F}(2, 4), \mathcal{F}(-2, -4)$$

ont pour valeur commune  $\mathcal{F}(2, 4)$ , puisque l'on doit avoir

$$\mathcal{F}(2, -4) = \mathcal{F}(2, 4), \quad \mathcal{F}(-2, 4) = -\mathcal{F}(2, 4).$$

Ils donnent donc pour total

$$4\mathcal{F}(2, 4),$$

c'est-à-dire  $4R_1$ . Ainsi on a cette fois encore

$$R' = R + 4R_1.$$

5. On remplira évidemment les conditions imposées à la fonction  $\mathcal{F}(x, y)$  en posant

$$\mathcal{F}(x, y) = x.$$

Notre formule donne donc

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} d' = \sum d + 4 \sum (-1)^{\frac{d_3-1}{2}} d_1.$$

Pour former la somme placée au premier membre, il faut la considérer comme une somme triple, et se rappeler nos équations du n° 1 :

$$2m = m' + m'', \quad m' = d' \delta', \quad m'' = d'' \delta'',$$

puis désigner, d'après une notation qui nous est habituelle, par

$$\rho(m'')$$

la somme des valeurs de

$$(-1)^{\frac{d''-1}{2}}$$

pour les diviseurs  $d''$  de  $m''$ , et par

$$\zeta_1(m')$$

la somme des diviseurs  $d'$  de  $m'$ . Le premier membre pourra s'écrire alors

$$\sum \zeta_1(m') \rho(m''),$$

le signe sommatoire portant maintenant sur tous les groupes  $m', m''$ . On opérera d'une manière semblable pour le second membre, en se rappelant nos équations du n° 2 :

$$m = m_1 + 2^{\alpha_1} m_2, \quad m_1 = d_1 \delta_1, \quad m_2 = d_2 \delta_2;$$

et l'on arrivera à la formule

$$\sum \zeta_1(m') \rho(m'') = \zeta_1(m) + 4 \sum \zeta_1(m_1) \rho(m_2).$$

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire de développer ici d'autres exemples et je me borne à indiquer celui de

$$\mathfrak{F}(x, y) = \sin(xt) \cos(yz),$$

$t$  et  $z$  étant des constantes arbitraires.

