

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans
la théorie des nombres; dix-septième article**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 10 (1865), p. 135-144.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__135_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES
DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIX-SEPTIÈME ARTICLE.

1. La formule qui est l'objet de ce dix-septième article a quelque importance à mes yeux. Elle jouera un rôle utile dans l'ensemble de mon travail.

Soit

un nombre impair donné, m
 d

un quelconque des diviseurs de m (dont 1 et m font toujours partie) et
 δ

le diviseur conjugué, en sorte que

$$m = d\delta.$$

Étendons d'ailleurs cette notation aux autres entiers impairs, comme

$$m', m''$$

ou

$$m_1, m_2,$$

que nous aurons plus tard à considérer, c'est-à-dire posons de même de toutes les manières possibles

$$m' = d' \delta', \quad m'' = d'' \delta'',$$

ou bien

$$m_1 = d_1 \delta_1, \quad m_2 = d_2 \delta_2,$$

$d', \delta', d'', \delta'', d_1, \delta_1, d_2, \delta_2$ étant toujours des entiers positifs.

2. Cela compris, je regarde l'entier impairement pair $2m$ comme décomposé de toutes les manières possibles en une somme de deux entiers positifs impairs m' , m'' . Pour avoir ainsi

$$2m = m' + m'',$$

on n'aura qu'à faire successivement

$$m' = 1, \quad m' = 3, \dots, \quad m' = 2m - 1;$$

les valeurs correspondantes de m'' seront

$$m'' = 2m - 1, \quad m'' = 2m - 3, \dots, \quad m'' = 1.$$

Mettant ensuite m' et m'' sous la forme de produits d'après ce qu'on a expliqué plus haut, on aura l'équation

$$2m = d' \delta' + d'' \delta'',$$

qui est une de celles dont nous voulons nous occuper dans cet article.

En introduisant une fonction

$$\psi(x, y)$$

de deux variables, nous tirerons de l'équation

$$2m = d' \delta' + d'' \delta''$$

la somme triple que voici :

$$\sum \left[\sum \sum (-1)^{\frac{\delta' - 1}{2} + \frac{d'' - 1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta'') \right].$$

Les deux premières sommations portent sur les valeurs de d' , δ' et d'' , δ'' relatives à chaque groupe m' , m'' ; la dernière concerne le total fait, pour l'ensemble des groupes, des sommes partielles ainsi obtenues.

Au reste, on pourra n'écrire qu'un seul signe

$$\sum;$$

il n'y aura aucune difficulté à se représenter ce que nous entendrons par

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta''),$$

et la notation restera suffisamment expressive en devenant beaucoup plus simple.

Jusqu'ici la fonction

$$\psi(x, y)$$

qui figure sous le signe sommatoire est entièrement arbitraire. Plus tard nous l'assujettirons à quelques conditions qui seront indiquées en temps utile.

5. Il faut maintenant se représenter le nombre m comme formé de deux parties entières et positives, l'une impaire, l'autre paire, c'est-à-dire écrire de toutes les manières possibles

$$m = m_1 + 2^{\alpha_1} m_2,$$

m_1 et m_2 étant des entiers impairs et positifs; les valeurs successives de m_1 seront

$$1, 3, 5, \dots, m-4, m-2;$$

celles de m_2 en résulteront par notre équation même qui donne

$$2^{\alpha_1} m_2 = m - m_1,$$

l'exposant α_1 variant d'un cas à l'autre. En mettant m_1 et m_2 sous la forme de produits, nous aurons ensuite l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_1} d_2 \delta_2,$$

et nous pourrons considérer la somme nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2} + \frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_1+1} d_2)$$

qui se rapporte au mode de partition que cette équation indique. Bien qu'il s'agisse ici encore d'une somme triple, nous n'employons qu'un seul

$$\sum,$$

persuadés que cela ne nuira pas à la clarté. On se souviendra que la sommation porte sur l'ensemble des valeurs de

$$d_1, \delta_1, 2^{\alpha_2} d_2, \delta_2$$

qui sont compatibles avec la nature de ces quantités elles-mêmes et avec l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2.$$

Au reste la somme triple écrite explicitement serait

$$\sum \left[\sum \sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2} + \frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2) \right],$$

les deux premiers

$$\sum$$

portant sur les valeurs de

$$d_1, \delta_1, 2^{\alpha_2} d_2, \delta_2$$

relatives à chaque groupe

$$m_1, 2^{\alpha_2} m_2,$$

et le troisième sur le total, pour l'ensemble des groupes, des sommes partielles ainsi obtenues.

4. Il faut maintenant rapprocher entre elles la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{\delta''-1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta'')$$

du n° 2, que nous désignerons par

$$S',$$

et la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2} + \frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_1+1}d_2)$$

du n° 3, que nous désignerons par

$$S_1.$$

Ce rapprochement s'opérera au moyen d'une certaine somme simple

$$S,$$

relative à l'équation

$$m = d\delta,$$

et que nous définirons en disant que

$$S = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d).$$

Mais pour arriver au but, nous devons imposer quelques restrictions à l'absolue généralité de la fonction

$$\psi(x, y).$$

Désormais donc, nous exigerons que la fonction $\psi(x, y)$ soit à la fois symétrique et paire en x, y , c'est-à-dire nous exigerons que l'on ait d'une part

$$\psi(x, y) = \psi(y, x)$$

et d'autre part

$$\psi(-x, y) = \psi(x, y), \quad \psi(x, -y) = \psi(x, y).$$

On pourra, si l'on veut, poser

$$\psi(x, y) = f(x, y) + f(y, x);$$

la condition de symétrie sera remplie d'elle-même, et il suffira que

$$f(x, y)$$

soit une fonction paire.

Pour toute fonction

$$\psi(x, y)$$

du genre indiqué, que cette fonction soit d'ailleurs algébrique ou numérique, on aura

$$S' = S + 4S_1,$$

ou bien, explicitement,

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta'') \\ &= \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d) + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2} + \frac{\delta_2-1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_1+1} d_2), \end{aligned}$$

formule remarquable qu'on joindra, pour les compléter, à celles de nos premiers articles.

5. Nous appliquerons cette formule à quelques exemples. Et d'abord sans particulariser davantage la fonction $\psi(x, y)$, nous ferons successivement $m = 1$, puis $m = 3$.

Pour

$$m = 1,$$

l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_1} d_2 \delta_2$$

est impossible; la somme

$$S_1$$

relative à ce mode de partition est donc nulle. Quant aux équations

$$m = d\delta$$

et

$$2m = d' \delta' + d'' \delta'',$$

elles n'ont évidemment lieu qu'en prenant l'unité pour valeur commune de

$$d, \delta, d', \delta', d'', \delta''.$$

De là

$$S = \psi(0, 2)$$

et

$$S' = \psi(0, 2).$$

L'équation

$$S' = S + 4S_1$$

est donc exacte.

Pour $m = 3$, l'équation

$$m = d\delta$$

donne $d = 3$, $\delta = 1$, ou bien $d = 1$, $\delta = 3$; par conséquent

$$S = \psi(0, 6) - \psi(0, 2).$$

L'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_2}d_2\delta_2$$

n'a lieu qu'avec

$$d_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad 2^{\alpha_2}d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1,$$

en sorte que

$$S_1 = \psi(2, 4).$$

Quant à l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elle comporte huit systèmes de solutions compris dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5, \\ d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\ d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\ d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\ d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\ d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\ d' = 1, & \delta' = 5, & d'' = 1, & \delta'' = 1, \\ d' = 5, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 1. \end{array}$$

La somme

$$S'$$

est donc composée de huit termes, savoir

$$\begin{aligned} & \psi(0, 6) + \psi(-4, 2) - \psi(0, 6) + \psi(-2, 4) \\ & + \psi(2, 4) - \psi(0, 2) + \psi(0, 6) + \psi(4, 2). \end{aligned}$$

Il y a trois termes dont la valeur absolue est $\psi(0, 6)$, qu'on prend deux fois positivement et une fois négativement; groupez-les avec le terme négatif où figure $\psi(0, 2)$: le total sera

$$\psi(0, 6) - \psi(0, 2),$$

c'est-à-dire précisément S. Quant aux autres termes

$$\psi(-4, 2), \quad \psi(-2, 4), \quad \psi(2, 4), \quad \psi(4, 2),$$

ils sont égaux entre eux et à $\psi(2, 4)$, c'est-à-dire à S_1 , d'après la nature de la fonction $\psi(x, y)$, qui est à la fois symétrique et paire. On a donc bien

$$S' = S + 4S_1.$$

6. Les conditions imposées à la fonction

$$\psi(x, y)$$

seront remplies si l'on suppose constamment

$$\psi(x, y) = 1.$$

Alors notre formule générale deviendra

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2} + \frac{d''-1}{2}} = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2} + \frac{\delta_2-1}{2}},$$

ou bien, en introduisant une notation qui nous est familière,

$$\sum \rho(m') \rho(m'') = \rho(m) + 4 \sum \rho(m_1) \rho(m_2).$$

On se souvient qu'un entier impair m étant mis de toutes les manières

possibles sous la forme

$$m = d\delta,$$

nous faisons

$$\rho(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

et que m' , m'' , m_1 , m_2 sont aussi des entiers impairs liés à m par les deux équations

$$2m = m' + m'', \quad m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

C'est à ces équations que se rapportent les sommes indiquées dans la formule

$$\sum \rho(m') \rho(m'') = \rho(m) + 4 \sum \rho(m_1) \rho(m_2),$$

laquelle peut du reste être obtenue de plus d'une manière. Mais ici nous la déduisons immédiatement d'une formule très-étendue dont la démonstration élémentaire et directe est facile, circonstance dont nous pourrions ailleurs tirer parti.

7. On remplirait aussi les conditions imposées à la fonction

$$\psi(x, y)$$

en prenant

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2,$$

ou plus généralement

$$\psi(x, y) = x^{2\mu} + y^{2\mu},$$

l'entier μ étant quelconque.

On pourrait prendre également

$$\psi(x, y) = x^2 y^2,$$

ou encore

$$\psi(x, y) = x^{2\mu} y^{2\mu}.$$

Rien n'empêcherait d'introduire des fonctions trigonométriques, de faire par exemple, en désignant par t une constante arbitraire,

$$\psi(x, y) = \cos(xt) \cos(yt),$$

ou bien

$$\psi(x, y) = \cos(xt) + \cos(yt),$$

et ainsi de suite.

On peut obtenir de cette façon une infinité de formules particulières dont chacune aura sa valeur propre. Mais l'étude approfondie de tous ces détails doit être renvoyée à une autre circonstance. Nous n'avons pour objet, dans cet article, que de poser la formule

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{\frac{\delta' - 1}{2} + \frac{d'' - 1}{2}} \psi(d' - d'', \delta' + \delta'') \\ &= \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \psi(0, 2d) + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \psi(2d_1, 2^{\alpha_1 + 1} d_2), \end{aligned}$$

d'expliquer nettement la nature des éléments dont elle dépend, de faire sentir enfin qu'elle pourra être souvent utile. A cet égard, nous avons, je crois, dit tout ce qu'il fallait. Insistons cependant sur ce point que pourvu que la fonction

$$\psi(x, y)$$

satisfasse aux conditions que nous lui avons imposées pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui peuvent s'offrir dans notre formule, cette fonction sera du reste quelconque, soit algébrique, soit purement numérique. C'est une remarque applicable à toutes nos *formules générales*, mais que je ne crains pas de répéter parce qu'elle est vraiment fondamentale et parce qu'elle indique avec précision le caractère singulier de ces formules.

