

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CASIMIR RICHAUD

Énoncés de quelques théorèmes sur la possibilité de l'équation
 $x^2 - Ny^2 = -1$ **en nombres entiers**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 9 (1864), p. 384-388.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9_384_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

ÉNONCÉS DE QUELQUES THÉORÈMES

SUR

LA POSSIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^2 - Ny^2 = -1$ EN NOMBRES ENTIERS.*Lettre adressée à M. Liouville par M. Casimir Richaud.*

Paris, le 20 novembre 1864.

Monsieur et très-honoré maître,

Je me suis occupé dans ces derniers temps de quelques questions de théorie des nombres relatives à la résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 - Ny^2 = P$.

J'ai l'honneur de vous adresser aujourd'hui une partie des résultats auxquels je suis parvenu sur l'équation particulière $x^2 - Ny^2 = -1$. Dans le cas où vous accueilleriez favorablement les théorèmes énoncés ci-après, je suis en mesure de vous transmettre les démonstrations. Les théorèmes **11** et **12** peuvent être étendus à une combinaison quelconque des facteurs premiers $\omega, A, B, \dots, a, b, \dots$, et les conditions restrictives des mêmes théorèmes peuvent être modifiées, sans que l'équation correspondante cesse d'être possible en nombres entiers.

Agrécz, je vous prie, Monsieur et très-vénéré maître, l'assurance des sentiments respectueux de votre serviteur dévoué,

C. RICHAUD.

1. Si $A, B, C, \dots, L$ désignent des nombres premiers de la forme $8n + 5$, les équations

$$x^2 - 2A^\alpha y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1}B^{2\beta+1}y^2 = -1,$$

$$x^2 - 2A^{2\alpha}B^{2\beta} \dots L^{2\lambda}y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

2. Si A, B, C, ..., L désignent des nombres premiers de la forme $8n + 5$, et si B, C, ..., L ne sont pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$, les équations

$$\begin{aligned}x^2 - 2A^\alpha B^\beta \gamma^2 &= -1, \\x^2 - 2A^\alpha B^{2\beta+1} C^{2\gamma+1} \gamma^2 &= -1, \\x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta} C^{2\gamma} \dots L^{2\lambda} \gamma^2 &= -1\end{aligned}$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

3. Si A désigne un nombre premier $8n + 5$, et si $a, b, c, \dots, l$ représentent des facteurs premiers $8n + 1$, les équations

$$\begin{aligned}x^2 - 2A^{2m+1} a^\alpha \gamma^2 &= -1, \\x^2 - 2A^{2m+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \gamma^2 &= -1, \\x^2 - 2A^{2m+1} a^{2\alpha} b^{2\beta} \dots l^{2\lambda} \gamma^2 &= -1\end{aligned}$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que $a, b, c, \dots, l$ ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Au^2$.

4. A et B désignant deux nombres premiers $8n + 5$, et $a, b, c, \dots, l$ des facteurs premiers $8n + 1$, les équations

$$\begin{aligned}x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^m \gamma^2 &= -1, \\x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} a^{2m} b^{2n} \dots l^{2s} \gamma^2 &= -1\end{aligned}$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que $a, b, \dots, l$ ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - ABu^2$.

5. Si A, B, C, ..., L, M désignent des nombres premiers $8n + 5$, l'équation

$$x^2 - 2A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} \dots L^{2\lambda+1} M^{2\mu+1} \gamma^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - 2AB \dots L \gamma^2 = -1$$

est soluble en nombres de la même nature et lorsqu'en outre M n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2AB \dots Lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{M}\right) = \left(\frac{B}{M}\right) = \dots = \left(\frac{L}{M}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

6. A désignant un nombre premier $8n + 5$ et $a, b, \dots, l, m$ des nombres premiers $8n + 1$, l'équation

$$x^2 - 2A^{2\rho+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \dots l^{2\lambda+1} m^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, si l'équation

$$x^2 - 2Aab \dots ly^2 = -1$$

est soluble en nombres de la même espèce et si de plus m n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - 2Aab \dots lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{m}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right) = \dots = \left(\frac{l}{m}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

Remarque. — Les théorèmes précédents, relatifs au facteur 2, peuvent être étendus à un facteur premier quelconque ω de la forme $4n + 1$.

7. ω représentant un facteur premier $4n + 1$ et $A, B, \dots, L$ désignant des nombres premiers de la même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$x^2 - \omega^m A^{2\alpha+1} y^2 = -1,$$

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha y^2 = -1,$$

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} y^2 = -1,$$

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha} B^{2\beta} \dots L^{2\lambda} y^2 = -1$$

sont toujours possibles en nombres entiers.

8. ω désignant un nombre premier $4n + 1$ et $A, B, C, \dots, L$ des facteurs premiers de même forme non compris dans les diviseurs li-

néaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$\begin{aligned}x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha B^6 \gamma^2 &= -1, \\x^2 - \omega^{2m+1} A^\alpha B^{26+1} C^{2\gamma+1} \gamma^2 &= -1, \\x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{26} C^{2\gamma} \dots L^{2\lambda} \gamma^2 &= -1\end{aligned}$$

sont possibles en nombres entiers, pourvu que B, C, ..., L ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega A u^2$.

9. ω représentant un nombre premier $4n + 1$, A un facteur premier de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, c, \dots, l$ des facteurs premiers $4n + 1$ compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$\begin{aligned}x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^\alpha \gamma^2 &= -1, \\x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^{2\alpha+1} b^{26+1} \gamma^2 &= -1, \\x^2 - \omega^{2m+1} A^{2m+1} a^{2\alpha} b^{26} \dots l^{2\lambda} \gamma^2 &= -1\end{aligned}$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que $a, b, \dots, l$ ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - A u^2$.

10. ω représentant un nombre premier $4n + 1$, A et B deux nombres premiers de même forme non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, \dots, l$ des facteurs premiers $4n + 1$ compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, les équations

$$\begin{aligned}x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{26+1} a^\alpha \gamma^2 &= -1, \\x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{26+1} a^{2\alpha} b^{26} \dots l^{2\lambda} \gamma^2 &= -1\end{aligned}$$

sont toujours possibles en nombres entiers, pourvu que les facteurs premiers $a, b, \dots, l$ ne soient pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - AB u^2$.

11. ω désignant un nombre premier $4n + 1$ et A, B, C, ..., L, M des nombres premiers de même forme non compris dans les diviseurs

linéaires de $t^2 - \omega u^2$, l'équation

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2\alpha+1} B^{2\beta+1} \dots L^{2\lambda+1} M^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - \omega AB \dots L y^2 = -1$$

admet des solutions de la même nature et lorsque de plus M n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega AB \dots Lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{M}\right) = \left(\frac{B}{M}\right) = \dots = \left(\frac{L}{M}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$

12. ω désignant un nombre premier $4n+1$, A un nombre de même nature non compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$ et $a, b, \dots, l, m$ des facteurs premiers $4n+1$ compris au contraire dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega u^2$, l'équation

$$x^2 - \omega^{2m+1} A^{2p+1} a^{2\alpha+1} b^{2\beta+1} \dots l^{2\lambda+1} m^{2\mu+1} y^2 = -1$$

est toujours possible en nombres entiers, lorsque l'équation

$$x^2 - \omega Aab \dots l y^2 = -1$$

est soluble en entiers, et lorsque de plus m n'est pas compris dans les diviseurs linéaires de $t^2 - \omega Aab \dots lu^2$, pour le cas de

$$\left(\frac{A}{m}\right) = -1, \quad \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{b}{m}\right) = \dots = \left(\frac{l}{m}\right) = 1 \text{ (notation de Legendre).}$$