JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHÉBICHEF

Sur l'intégration des différentielles irrationnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 242-246.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__242_0>

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES;

Par M. P. TCHÉBICHEF [*].

En vertu de ce que nous avons montré dans le Mémoire sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, 1857), l'intégration de la différentielle

$$\frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}}$$

en termes finis, quelles que soient les fonctions entières $f(x)$ et $F(x)$, se réduit définitivement à l'évaluation des intégrales de la forme

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx,$$

où l, m, n, p sont des valeurs connues et L une constante qui se détermine par la condition que ces intégrales soient exprimables en termes finis. Tant que cette condition peut être remplie, on trouve l'intégrale

$$\int \frac{x + L}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx,$$

d'après la méthode d'Abel, en développant en fraction continue l'expression

$$\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p},$$

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LI, p. 46), séance du 9 juillet 1860.

et en poussant ce développement jusqu'à des dénominateurs où se manifeste leur périodicité. Mais comme cette périodicité n'a pas lieu dans le cas où l'intégrale

$$\int \frac{x+\mathrm{L}}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx,$$

pour toutes les valeurs de L, est impossible en termes finis, on conçoit que cette méthode conduit à une série d'opérations qui peut aller à l'infini sans donner aucun résultat décisif. Cette difficulté ne saura être levée par la considération des intégrales qui déterminent la nature de la fonction

$$\int \frac{x+\mathrm{L}}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx$$

et par lesquelles on peut reconnaître s'il y a lieu de chercher son expression en termes finis, car pour cela il est indispensable d'avoir la valeur exacte de ces intégrales, tandis qu'elles ne peuvent être évaluées qu'approximativement. Pour l'intégration en question, on doit avoir un moyen qui, d'après la nature des quantités l, m, n, p, et à l'aide des seules opérations algébriques en nombre limité, puisse manifester si l'intégrale

$$\int \frac{x+\mathrm{L}}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx$$

est possible ou non en termes finis. C'est ce que nous avons cherché à faire, et nous y sommes parvenu, en tant que les quantités l, m, n, p sont rationnelles et le polynôme

$$x^4+lx^3+mx^2+nx+p$$

indécomposable en facteurs linéaires à l'aide des seuls radicaux carrés. Au moyen de la méthode que nous avons trouvée pour l'intégration des différentielles de ce cas, on parvient, par une série d'opérations identiques, ou à s'assurer que cette intégration est impossible en termes finis, ou bien à l'exécuter complétement. En tous cas le procédé se termine, et chaque fois on peut assigner la limite du nombre des opérations qu'on aura à faire. En remettant l'exposé de cette méthode à un Mémoire détaillé sur ce sujet, nous nous bornerons pour le moment à observer que, pour le cas que nous avons résolu, la méthode en question fournit un moyen infaillible d'assigner la limite où, en cherchant l'intégrale par la méthode d'Abel, on peut toujours arrêter le développement en fraction continue. Cela posé, et en admettant, pour plus de simplicité, que la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{L}}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}\,dx$$

est réduite à la forme

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}\,dx,$$

p, q, r désignant des nombres entiers, la méthode d'Abel relative au cas en question peut être complétée ainsi qu'il suit :

Si dans la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}\,dx,$$

le polynôme

$$x^4+px^2+qx+r,$$

ayant pour coefficients des nombres entiers, n'est pas décomposable en facteurs linéaires à l'aide des seuls radicaux carrés, cette différentielle, quelle que soit la valeur A, ne pourra être intégrée en termes finis, tant que dans la fraction continue résultant du développement de

$$\sqrt{x^4+px^2+qx+r},$$

aucun des $2\mathrm{N}-1$ premiers dénominateurs n'est du deuxième degré, N étant le nombre des solutions entières des équations

$$y^2-3xz=p^2+12r,$$

$$z^2[4x^3z-x^2y^2-18xyz+4y^3+27z^2]$$
$$=(4p^3+27q^2)q^2-16[(p^2-4r)^2+9pq^2]r.$$

Dans le cas contraire, pour une certaine valeur de A, la différentielle

$$\frac{x+\mathrm{A}}{\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}\,dx$$

s'intègre en termes finis, et l'on trouve son intégrale par la formule

$$\frac{1}{2\lambda}\log\frac{\varphi(x)+\sqrt{x^4+px^2+qx+r}}{\varphi(x)+\sqrt{x^4+px^2+qx+r}},$$

où $\varphi(x)$ est la réduite qu'on obtient en s'arrêtant dans le développement de

$$\sqrt{x^4+px^2+qx+r}$$

en fraction continue au premier dénominateur du second degré, et λ le degré du numérateur de cette réduite.

La méthode d'Abel ainsi complétée donne tout ce qui est nécessaire pour l'intégration des différentielles en question, vu qu'on peut toujours déterminer le nombre N qui désigne combien les équations

$$y^2-3xz=p^2+12r,$$
$$z^2[4x^3z+x^2y^2-18xyz+4y^3+27z^2]$$
$$=(4p^3+27q^2)q^2-16[(p^2-4r)^2+9pq^2]r$$

ont de solutions entières.

En effet, la dernière de ces équations suppose que le carré de z divise le nombre

$$(4p^3+27q^2)q^2-16[(p^2-4r)^2+9pq^2]r.$$

Donc, en cherchant les diviseurs carrés de ce nombre, on parviendra à assigner toutes les valeurs que peut avoir l'inconnue z. D'autre part, en prenant pour z chacune de ces valeurs, avec le signe + ou −, on aura pour obtenir x et y deux équations qui déterminent complètement ces inconnues, et qui, d'après la forme de ces égalités, ne peuvent avoir plus de six solutions. Il sera donc facile d'énumérer les solutions entières de ces équations, et on voit que leur totalité ne surpassera jamais le produit du nombre des diviseurs carrés de

$$(4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r$$

par 12.