JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 9 (1864), p. 223-224.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9__223_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME

$x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il nous est facile maintenant d'indiquer une méthode simple pour trouver le nombre

$$N(n = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2,$$

où n est un entier donné et x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs.

Et d'abord on voit sans peine que quand il s'agit d'un entier multiple de 3, la valeur du nombre demandé est égale à celle de

$$N(n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2)$$

que nous avons donnée dans le cahier de mai 1863 (p. 141). On peut donc se borner au cas d'un entier premier à 3, c'est-à-dire faire seulement

$$n = 3g + 1$$

et

$$n = 3g + 2.$$

Mais d'un autre côté il est aisé de prouver que pour

$$n = 3g + 2$$

l'équation proposée est impossible. En d'autres termes, on a

$$N(3g + 2 = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2) = 0.$$

Nous n'avons donc à nous occuper que des entiers n de la forme $3g+1$.

Dans cette hypothèse de $n=3g+1$, on cherchera (que n soit pair ou impair) la somme

$$\zeta_1(n)$$

des diviseurs de n; et on aura

$$\mathrm{N}(n = x^2 + xy + y^2 + 3z^2 + 3zt + 3t^2) = 6\zeta_1(n).$$

Cette formule résout la question proposée.

Ainsi, pour $n=1$, on devra trouver six solutions; et, pour $n=4$, on devra en trouver quarante-deux. Mais je laisse au lecteur à vérifier l'exactitude de ces résultats, et je ne veux pas insister sur les applications numériques que l'on peut faire de notre formule. Je ne m'arrêterai pas non plus à chercher séparément le nombre des solutions propres, m'en référant sur ce point à la méthode générale que l'on connaît.