

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 9 (1864), p. 161-174.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1864_2_9_161_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre des représentations d'un entier n quelconque par la forme à six variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

ou, ce qui revient au même, du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

où x, y, z, t, u, v sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m désignant un entier impair, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. La valeur de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

dépendra naturellement de l'exposant α ; elle dépend aussi de la valeur de $m \pmod{8}$. Mais elle dépend surtout d'une fonction numérique de m , proportionnellement à laquelle

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

varie quand on considère la suite des entiers $2^\alpha m$ qui répondent à une même valeur donnée de α et de $m \pmod{8}$. Nous dirons donc d'abord quelques mots de cette fonction numérique importante.

2. Décomposons l'entier m , de toutes les manières possibles, en un produit de deux facteurs conjugués d, δ , en sorte que

$$m = d\delta.$$

La fonction numérique dont nous parlons s'exprime par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2} + \frac{\delta^2-1}{8}} d^2.$$

En introduisant un symbole connu de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi, on peut encore l'écrire

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2.$$

On a

$$\left(\frac{-2}{\delta} \right) = \left(\frac{-2}{d} \right)$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3;$$

on a donc alors

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2 = \sum \left(\frac{-2}{d} \right) d^2.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{-2}{d} \right) = 1$$

quand d est $\equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$; tandis que

$$\left(\frac{-2}{d} \right) = -1$$

quand d est $\equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$. Donc, quand il s'agit d'un entier m

de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

représente l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$ sur la somme des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$.

L'inverse a lieu quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7.$$

Dans ce cas

$$\left(\frac{-2}{\delta} \right) = - \left(\frac{-2}{d} \right),$$

et par suite

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2 = - \sum \left(\frac{-2}{d} \right) d^2.$$

Quand il s'agit d'un entier m de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7,$$

la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

représente donc l'excès de la somme des carrés des diviseurs de m qui sont $\equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$ sur la somme des carrés des diviseurs de m qui sont au contraire $\equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$.

Pour $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, etc., les valeurs respectives de la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

sont

$$1, 10, 24, 48, 91, 122, \text{ etc.}$$

La fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

peut aussi s'exprimer par un produit. Soit

$$m = a^\lambda b^\rho \dots,$$

a , b , etc., désignant les facteurs premiers de m . Le produit dont il s'agit sera celui des quantités suivantes :

$$\begin{aligned} & a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a} \right) a^{2\lambda-2} + a^{2\lambda-4} + \left(\frac{-2}{a} \right) a^{2\lambda-6} + \dots, \\ & b^{2\rho} + \left(\frac{-2}{b} \right) b^{2\rho-2} + b^{2\rho-4} + \left(\frac{-2}{b} \right) b^{2\rho-6} + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

On pourra donc, suivant une notation connue, le représenter par

$$\prod \left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a} \right) a^{2\lambda-2} + a^{2\lambda-4} + \left(\frac{-2}{a} \right) a^{2\lambda-6} + \dots \right].$$

Par cette expression en produit, on voit que l'on a essentiellement

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2 > 0.$$

Au contraire la fonction

$$\sum \left(\frac{-2}{d} \right) d^2,$$

numériquement égale à la nôtre, prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives.

3. La valeur générale de

$$N(2^z m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

s'obtient en multipliant la fonction numérique de m dont nous venons de parler, savoir

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

ou

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2} + \frac{\delta^2-1}{8}} d^2,$$

par le facteur suivant

$$\frac{2}{3} \left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m} \right) \right],$$

qui dépend de l'exposant α et de la valeur de $m \pmod{8}$.

Cette équation si simple

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

j'ai eu, je l'avoue, quelque peine à l'établir dans toute sa généralité. Je l'ai d'abord démontrée pour le cas de m égal à $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$; mais le cas de m égal à $8\mu + 1$ ou $8\mu + 3$ échappait à mes formules. Enfin j'ai réussi à trouver une méthode propre à tous les cas. Je suis donc certain maintenant de l'exactitude absolue de l'équation que je viens de poser.

4. Considérons d'abord un nombre impair m , et faisons $\alpha = 0$. Notre formule donne

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[16 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

c'est-à-dire

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 10 \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 3,$$

mais

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{34}{3} \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

quand m est de l'une des deux formes

$$8\mu + 5, \quad 8\mu + 7.$$

Ainsi on a

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 10,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$1 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + 2 \cdot 0^2,$$

qui donnent pour l'entier 1 dix représentations par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

On a ensuite

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 100;$$

or cela est confirmé par les identités

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2$$

et

$$3 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2,$$

où l'on devra marquer du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls, puis effectuer les permutations convenables. La première identité fournira de cette manière quatre-vingts représentations de l'entier 3 et la seconde en fournira vingt.

L'équation

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{34}{3} \cdot 24 = 272$$

est aisée à vérifier au moyen des identités

$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$5 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2;$$

la première fournit trente-deux représentations de l'entier 5, la seconde en fournit quatre-vingts, le troisième cent soixante. Or

$$32 + 80 + 160 = 272.$$

Enfin on a

$$N(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 544.$$

Pour vérifier cette valeur, on se servira des identités

$$7 = 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.0^2,$$

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2,$$

$$7 = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.1^2.$$

En y affectant du double signe ± 1 les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en y opérant les permutations convenables, on tirera de la première de ces identités trois cent vingt représentations du nombre 7, la seconde en fournira soixante-quatre, la troisième cent soixante; or

$$320 + 64 + 160 = 544.$$

5. Pour les entiers impairement pairs $2m$, on a

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[64 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

c'est-à-dire

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42 \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

quand m est égal à $8\mu + 1$ ou $8\mu + 3$, mais

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3} \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

quand m s'exprime par $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$.

Ainsi

$$N(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42;$$

or, au moyen des deux identités

$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2,$$

on obtient en effet quarante-deux représentations de l'entier 2, la première identité fournissant quarante représentations et la seconde en fournissant deux.

On a ensuite

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 42 \cdot 10 = 420.$$

Or les identités

$$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$6 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$6 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2$$

fournissent effectivement quatre cent vingt représentations de l'entier 6; la première en donne deux cent quarante, la seconde cent soixante, la troisième vingt.

L'équation

$$N(10 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3} \cdot 24 = 1040$$

se vérifie semblablement au moyen des identités

$$10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$10 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$10 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$10 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 2^2;$$

les nombres de représentations qu'elles fournissent respectivement sont quatre-vingts, quatre cent quatre-vingts, quatre-vingts, trois cent vingt, quatre-vingts; or

$$80 + 480 + 80 + 320 + 80 = 1040.$$

Enfin on a, d'après notre formule,

$$N(14 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{130}{3} \cdot 48 = 2080;$$

et les identités

$$\begin{aligned} 14 &= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2, \\ 14 &= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 0^2, \\ 14 &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2, \\ 14 &= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2, \\ 14 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

montrent que ce résultat est exact. Elles fournissent des représentations de l'entier 14, dont le nombre est respectivement, de la première identité à la dernière,

$$480, 320, 640, 160, 480;$$

le total fait précisément 2080.

6. Passant aux entiers pairement pairs, nous nous bornerons à appliquer la formule

$$N(2^z m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[4^{z+2} - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2$$

aux deux plus petits multiples de 4, savoir 4 et 8.

D'abord nous trouvons

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 170.$$

Or ce résultat est confirmé par les identités

$$\begin{aligned} 4 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2, \\ 4 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2, \\ 4 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2, \end{aligned}$$

dont la première fournit dix représentations du nombre 4, tandis que chacune des deux autres en fournit quatre-vingts.

Pour le nombre 8, on a

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 682.$$

Les identités à employer cette fois sont

$$8 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$8 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 0^2,$$

$$8 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$8 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 2^2.$$

Elles fournissent des représentations de l'entier 8, dont le nombre compté de la première identité à la dernière est respectivement

$$40, 160, 480, 2;$$

or on a

$$40 + 160 + 480 + 2 = 682.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

7. Nous avons donné l'expression générale du nombre total

$$N(2^{\alpha}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$2^{\alpha}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

Mais on peut demander séparément celle du nombre

$$M(2^{\alpha}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions propres, pour lesquelles les indéterminées x, y, z, t, u, v ne sont pas toutes divisibles par un même facteur > 1 .

Pour l'obtenir, il faudra substituer à la somme

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

ou au produit qui peut remplacer cette somme, le produit suivant

$$\prod \left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a} \right) a^{2\lambda-2} \right],$$

qui se rapporte aux facteurs premiers $a, b, \dots$, de l'entier m mis sous la forme

$$m = a^\lambda b^\rho \dots;$$

pour en déduire la valeur de

$$M(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

il faudra multiplier ce produit par un facteur dépendant de α et de la valeur de $m \pmod{8}$, dont nous allons donner l'expression suivant les cas divers qui peuvent se présenter.

Dans le cas d'un entier impair, ou de $\alpha = 0$, ce facteur est

$$\frac{2}{3} \left[16 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right];$$

pour les entiers impairement pairs, ou pour $\alpha = 1$, il devient

$$\frac{2}{3} \left[64 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right];$$

enfin, pour $\alpha > 1$, il est égal à

$$5 \cdot 2^{2\alpha+1}.$$

Ainsi, pour l'entier 4, il n'y a que cent soixante solutions propres; dix solutions impropres complètent le nombre total cent soixante-dix, obtenu plus haut: ce sont celles qui répondent à l'identité

$$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2.$$

8. En nous occupant du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

nous avons admis jusqu'ici que les entiers x, y, z, t, u, v peuvent être indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. On peut aussi désirer de savoir quel est le nombre

$$\mathfrak{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)$$

des solutions de cette même équation quand on exige que x, y, z, t, u, v soient des entiers impairs et positifs, d'ailleurs quelconques. Il est bien clair que ce nombre est nul quand l'entier donné n n'est pas de la forme $8\mu + 7$. Mais quelle est la valeur de

$$\mathfrak{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2)?$$

Pour répondre à cette question, il faut décomposer $8\mu + 7$ de toutes les manières possibles en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués, puis prendre la quarante-huitième partie de la somme

$$\sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2.$$

On aura ainsi le nombre demandé. En d'autres termes,

$$\mathfrak{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{1}{48} \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2.$$

Par exemple, on a

$$\mathfrak{N}(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = 1;$$

ce qui est confirmé par l'équation

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2.$$

On a ensuite

$$\mathfrak{N}(15 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{240}{48} = 5;$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$15 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2,$$

où 3^2 peut occuper cinq places distinctes.

Enfin

$$\mathfrak{K}(23 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{528}{48} = 11,$$

résultat exact, comme on peut le voir au moyen des identités

$$23 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.3^2,$$

$$23 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2.1^2;$$

la première fournit une représentation de l'entier 23, la seconde en fournit dix.

Si, tout en n'admettant pour x, y, z, t, u, v que des entiers impairs et positifs dans l'équation

$$8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2,$$

on excluait les systèmes x, y, z, t, u, v où les indéterminées possèdent un facteur commun > 1 , le nombre des solutions pourrait devenir inférieur à

$$\frac{1}{48} \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2.$$

Il s'exprimerait alors par

$$\frac{1}{48} \prod \left[a^{2\lambda} + \left(\frac{-2}{a} \right) a^{2\lambda-2} \right],$$

le produit indiqué se rapportant aux facteurs premiers a, b , etc., de l'entier $8\mu + 7 = a^\lambda b^\rho \dots$; je crois pouvoir me dispenser d'ajouter des exemples.

9. En terminant, j'indiquerai celle de mes *formules générales* qui m'a conduit, dans le cas d'un entier impair m (le seul difficile ici), à la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2).$$

C'est la formule marquée (I) dans mon cinquième article, à la page 277 du cahier d'août 1858. En y faisant

$$f(x) = x \sin \left(\frac{x\pi}{4} \right),$$

on obtient une formule particulière qui mène au but quand on la discute convenablement, en s'appuyant sur ce que j'ai donné au sujet de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$ dans un article inséré au cahier de juillet 1861 (p. 225).

Ayant ainsi prouvé que

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{1}{3} \left[16 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

on en conclut facilement, par des considérations arithmétiques très-simples, que

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[64 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2,$$

et ensuite que

$$N(4m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[256 - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2.$$

On pourrait continuer et s'élever graduellement de $4m$ à $8m$, de $8m$ à $16m$, etc.; mais il vaut mieux tout achever en une seule fois. Désignons, en effet, par $\psi(\alpha)$ la fonction

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

où nous ne voulons pour le moment faire varier que α , et nous établirons sans peine l'égalité

$$\psi(\alpha + 3) - \psi(\alpha + 1) = 4[\psi(\alpha + 2) - \psi(\alpha)],$$

qui est exacte même pour $\alpha = 0$. De là notre équation générale

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2) = \frac{2}{3} \left[4^{\alpha+2} - \left(\frac{-2}{m} \right) \right] \sum \left(\frac{-2}{\delta} \right) d^2.$$

C'est aussi par des considérations arithmétiques fort simples que l'on déduit la valeur de

$$\mathfrak{N}(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2),$$

relative au cas des indéterminées impaires et positives, de celle de

$$N(8\mu + 7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2).$$

Quant à la recherche du nombre des solutions propres, elle n'offre aucune difficulté.