

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 229-238.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_229_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n , on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$N(n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question est bien facile quand l'entier donné n est de la forme $3q + 2$; car on a évidemment

$$N(3q + 2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 0.$$

Il est facile aussi de traiter le cas de $n = 3q$. En effet l'équation

$$3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$$

exige évidemment que t soit divisible par 3. Je fais donc $t = 3u$, et en divisant par 3, je vois que notre équation équivaut à celle-ci :

$$q = x^2 + y^2 + z^2 + 12u^2.$$

En d'autres termes, le nombre demandé

$$N(3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

équivalent à celui-ci

$$N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2)$$

que nous avons déterminé dans le cahier de mai (p. 161), où nous le désignons plus simplement par

$$N_0(q).$$

Nous écrirons en conséquence

$$N(3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = N_0(q).$$

2. Reste le cas de $n = 3q + 1$. Celui-là seul offre des difficultés spéciales. Néanmoins, dans ce cas même, nous réussirons à ramener la question proposée à une question déjà résolue.

Considérons d'abord les entiers impairs n de la forme $3q + 1$, c'est-à-dire soit

$$n = 6l + 1.$$

Il faut alors poser de toutes les manières possibles l'équation

$$4(6l + 1) = i^2 + 3j^2$$

où i et j sont des entiers impairs positifs, puis former la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux diverses valeurs de i . Cette somme, que nous désignerons par la simple lettre τ , sera un des éléments de notre calcul. On la retranchera de la moitié du nombre des solutions de l'équation

$$6l + 1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

dont nous nous sommes occupés plus haut, dans ce cahier même, et l'on obtiendra ainsi la valeur de

$$N(6l + 1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

savoir

$$\frac{1}{2} N [6l + 1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = \tau.$$

En désignant donc par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\partial-1}{2}} \left(\frac{\partial}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, ∂ de l'entier

$$6l + 1 = d\partial,$$

on aura

$$N(6l + 1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \sum - \tau$$

quand l est pair, c'est-à-dire quand

$$6l + 1 = 12k + 1,$$

mais

$$N(6l + 1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 3 \sum - \tau$$

quand l est impair, c'est-à-dire quand

$$6l + 1 = 12k - 5.$$

Pour $l = 0$, par exemple, il viendra

$$N(1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 1 - 1 = 0,$$

ce qui est évident à priori.

Pour $l = 1$, $6l + 1 = 7$, on a

$$\sum = 6;$$

les équations

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2$$

et

$$4.7 = 5^2 + 3.1^2$$

donnent d'ailleurs

$$\tau = 6.$$

Il vient donc

$$N(7 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 3.6 - 6 = 12;$$

c'est ce que confirment les identités

$$7 = 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

$$7 = 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

$$7 = 3.0^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui fournissent pour l'entier 7 douze représentations par la forme qui nous occupe.

3. Passons aux entiers pairs de la forme $3q + 1$, et d'abord aux entiers impairement pairs,

$$2(6l - 1).$$

Je ramène la recherche de

$$N[2(6l - 1) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2]$$

à celle de

$$N(6l - 1 = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2).$$

La valeur de cette dernière expression a été donnée plus haut, dans ce cahier même, et il suffit de la tripler pour avoir celle que nous cherchons. En d'autres termes, on a

$$N[2(6l - 1) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2] = 6 \sum,$$

la simple lettre

$$\sum$$

représentant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $6l - 1 = d\delta$.

Ainsi, par exemple, on doit avoir

$$N(10 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 24;$$

et cela est confirmé par les équations

$$10 = 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

$$10 = 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

$$10 = 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit pour l'entier 10 huit représentations.

De même, on doit avoir

$$N(22 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 72;$$

c'est ce qu'on vérifiera sans peine au moyen des identités

$$22 = 3.2^2 + 3.1^2 + 3.1^2 + 4.1^2$$

et

$$22 = 3.1^2 + 3.1^2 + 3.0^2 + 4.2^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

4. Les entiers pairement pairs de la forme $3q + 1$ peuvent être représentés, sous la condition de $\alpha > 1$, par

$$2^\alpha m,$$

m étant un entier de la forme $6l + 1$ quand l'exposant α est pair, et de la forme $6l - 1$ quand l'exposant α est impair. Cela étant, pour avoir

$$N(2^\alpha m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

on n'aura qu'à chercher

$$N[2^{\alpha-2} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)];$$

il est évident que ces deux quantités sont égales entre elles, et la seconde a été donnée plus haut, dans ce cahier même.

D'après cela, si l'on désigne par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on aura

$$N(2^{2\gamma+2}m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+1} - 1) \sum$$

si

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N(2^{2\gamma+2}m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+1} + 1) \sum$$

si

$$m = 12k - 5,$$

puis

$$N(2^{2\gamma+3}m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+2} - 1) \sum$$

quand

$$m = 12k - 1,$$

enfin

$$N(2^{2\gamma+3}m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2(2^{2\gamma+2} + 1) \sum,$$

quand

$$m = 12k + 5.$$

On admet pour γ la valeur 0, comme toute autre valeur > 0 .

La première de ces quatre formules donne

$$N(4 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2,$$

ce qui est exact, vu l'équation

$$4 = 3.0^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

D'après la seconde,

$$N(28 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 36,$$

ce qu'on vérifie aisément au moyen des deux identités

$$28 = 3.2^2 + 3.2^2 + 3.0^2 + 4.1^2,$$

$$28 = 3.2^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4.2^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

D'après la troisième formule,

$$N(88 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 72;$$

la vérification se fait facilement au moyen des deux identités

$$88 = 3.4^2 + 3.2^2 + 3.2^2 + 4.2^2,$$

$$88 = 3.2^2 + 3.2^2 + 3.0^2 + 4.4^2.$$

Enfin la quatrième formule donne

$$N(40 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 40;$$

et les équations

$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 2)^2,$$

$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2,$$

$$40 = 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2$$

confirment ce fait.

5. En traitant de la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

nous avons déterminé non-seulement le nombre total

$$N[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

30..

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

mais encore séparément le nombre des solutions pour lesquelles $z^2 + t^2$ est un entier pair, d'où résulte par soustraction le nombre des solutions pour lesquelles $z^2 + t^2$ est un entier impair. On en conclut facilement aussi les nombres relatifs à $x^2 + 3y^2$ entier pair et à $x^2 + 3y^2$ entier impair; car $x^2 + 3y^2$ et $z^2 + t^2$ sont de même espèce (mod. 2) si l'entier donné n est pair, et d'espèce opposée si n est impair, de sorte que quand on fixe la valeur de $x^2 + 3y^2$ (mod. 2), on fixe par cela même celle de $z^2 + t^2$, et *vice versa*.

Déterminer, comme nous venons de le faire, la valeur de

$$N(n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

c'est évidemment déterminer celle du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

pour lesquelles x est pair, et en retranchant ce nombre du total des solutions nous en déduirons le nombre de celles pour lesquelles x est impair.

Dans l'article suivant, nous nous occuperons de la forme

$$3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2;$$

par là nous arriverons à obtenir séparément aussi le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

pour lesquelles x et y sont pairs à la fois, et dès lors on pourra *mutatis mutandis* appliquer à la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

ce que nous avons dit concernant la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$, dans nos *Remarques nouvelles* insérées au cahier de juin. En un mot, on

peut trouver pour un entier quelconque n le nombre des solutions dont l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

est susceptible quand on admet des valeurs données d'espèce, relativement au module 2, pour une ou pour plusieurs des quatre indéterminées x, y, z, t .

6. Par exemple, il est intéressant de connaître l'expression très-simple du nombre des solutions que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

comporte en n'y prenant pour x, y, z, t que des entiers impairs et positifs. Je laisse de côté le cas de $n = 3q$, qui ne nous apprendrait rien de nouveau. Dès lors n devant être à la fois $\equiv 1 \pmod{3}$ et $\equiv 2 \pmod{8}$ ne pourra être que de la forme $24k + 10$. Soit donc

$$n = 24k + 10,$$

et qu'il s'agisse de trouver le nombre

$$\mathfrak{N} [24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions dont l'équation

$$24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

jouit en n'y prenant pour x, y, z, t que des entiers impairs positifs. Or notre analyse conduit à la formule

$$\mathfrak{N} [24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = \frac{1}{4} \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

où le signe sommatoire s'applique aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $12k + 5 = d\delta$ dont $24k + 10$ est le double.

Ainsi, on a

$$\mathfrak{N} [10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 1,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$10 = 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

On a ensuite

$$\mathfrak{N} [34 = x^2 + 3 (y^2 + z^2 + t^2)] = 4;$$

et cela est vérifié par les équations

$$34 = 1^2 + 3 (3^2 + 1^2 + 1^2),$$

$$34 = 1^2 + 3 (1^2 + 1^2 + 3^2),$$

$$34 = 1^2 + 3 (1^2 + 3^2 + 1^2),$$

$$34 = 5^2 + 3 (1^2 + 1^2 + 1^2),$$

On a de même

$$\mathfrak{N} [58 = x^2 + 3 (y^2 + z^2 + t^2)] = 7,$$

résultat confirmé par les identités

$$58 = 1^2 + 3 (3^2 + 3^2 + 1^2),$$

$$58 = 1^2 + 3 (3^2 + 1^2 + 3^2),$$

$$58 = 1^2 + 3 (1^2 + 3^2 + 3^2),$$

$$58 = 5^2 + 3 (3^2 + 1^2 + 1^2),$$

$$58 = 5^2 + 3 (1^2 + 3^2 + 1^2),$$

$$58 = 5^2 + 3 (1^2 + 1^2 + 3^2),$$

$$58 = 7^2 + 3 (1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Je ne pousserai pas plus loin ces calculs.

