

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 182-184.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_182_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n , par la forme

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire une expression simple du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs.

Comme cette équation peut s'écrire

$$n = x^2 + y^2 + (2t)^2 + 3z^2,$$

on comprend qu'elle se rattache à l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 3T^2,$$

pour laquelle le nombre

$$N(n)$$

des solutions a été donné dans le cahier d'avril. Mais, ici, nous n'admettons plus pour Z que des valeurs paires; et cela change beaucoup l'état de la question.

2. Soit d'abord n impair, et posons de toutes les manières possibles

l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

en y prenant pour i et j des entiers impairs positifs. La somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative aux diverses valeurs de i , et que nous désignerons par la simple lettre

$$\tau,$$

jouera ici un rôle utile. Nous la préférons cette fois à la fonction σ , relative à j , pour n'avoir pas à distinguer les deux cas de $n \equiv 1$ et de $n \equiv 3 \pmod{4}$. Je trouve en effet que, dans le cas de n impair quelconque,

$$N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2} N(n) + \tau.$$

Si donc on fait, comme dans le cahier d'avril, $n = 3^\beta m$, m impair premier à 3, on aura, suivant les notations employées dans ce cahier, pour le nombre demandé

$$N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

l'expression explicite

$$\frac{1}{2} \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3} \right) \right] \left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}} \right] \Sigma + \tau.$$

3. Qu'il s'agisse maintenant d'un entier impairement pair

$$2.3^\beta m.$$

Je trouve qu'alors il y a égalité entre

$$N(2.3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

et

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2).$$

En vertu d'une formule donnée aussi dans le cahier d'avril, on a donc

$$N(2 \cdot 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta \left(\frac{m}{3} \right) \right] \Sigma.$$

Pour un entier pairement pair,

$$n = 2^\alpha 3^\beta m, \quad \alpha > 1,$$

il faut encore recourir au cahier d'avril, car on trouve que, dans ce cas,

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{3} N(2^{\alpha-2} 3^\beta m) + \frac{2}{3} N(2^\alpha 3^\beta m).$$

Dans le cas de

$$\alpha > 1,$$

la valeur explicite de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

est donc

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3} \right) \right] \left[3 \cdot 2^{\alpha-1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}} \right] \Sigma.$$

