

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Sur la forme  $x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 2<sup>e</sup> série, tome 8 (1863), p. 141-144.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1863\\_2\\_8\\_141\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_141_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

I. On demande le nombre  $N$  des représentations d'un entier donne quelconque  $n$ , par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

c'est-à-dire le nombre  $N$  des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

où  $x, y, z, t$  sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme le facteur 3, quand il divise  $n$ , joue un rôle à part dans la solution de la question proposée, je ferai

$$n = 3^\alpha q,$$

$q$  étant un entier pair ou impair, mais premier à 3; et je dirai d'abord que la valeur de  $n$  ne dépend pas de l'exposant  $\alpha$ , en sorte qu'elle est la même que si l'on avait simplement  $n = q$ . Elle ne dépend, en effet, que de la somme des diviseurs de  $q$ , somme que nous représenterons à notre ordinaire par  $\zeta_1(q)$ , et l'on a

$$N = 12 \zeta_1(q).$$

Ainsi, pour  $n = 1$ , on a les douze représentations qui répondent aux valeurs suivantes de  $x, y, z, t$ :

$$\begin{array}{llll} x = 1, & y = 0, & z = 0, & t = 0, \\ x = 0, & y = 1, & z = 0, & t = 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x &= 0, & y &= 0, & z &= 0, & t &= 1, \\
x &= 0, & y &= 0, & z &= 1, & t &= 0, \\
x &= -1, & y &= 0, & z &= 0, & t &= 0, \\
x &= 0, & y &= -1, & z &= 0, & t &= 0, \\
x &= 0, & y &= 0, & z &= -1, & t &= 0, \\
x &= 0, & y &= 0, & z &= 0, & t &= -1, \\
x &= 1, & y &= -1, & z &= 0, & t &= 0, \\
x &= -1, & y &= 1, & z &= 0, & t &= 0, \\
x &= 0, & y &= 0, & z &= 1, & t &= -1, \\
x &= 0, & y &= 0, & z &= -1, & t &= 1;
\end{aligned}$$

et pour

$$n = 3^2,$$

on aurait de même

$$n = 12.$$

Pour

$$n = 500$$

et pour

$$n = 3^2 \cdot 500,$$

ce qui répond toujours à

$$q = 500 = 2^2 \cdot 5^3,$$

comme

$$\zeta_4(500) = 7.156 = 1092,$$

il viendra

$$N = 12.1092,$$

partant

$$N = 13104.$$

**2.** Nous venons de déterminer le nombre total  $N$  des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2.$$

Mais on pourrait aussi désirer d'avoir à part le nombre  $M$  des solu-

tions propres, pour lesquelles aucun facteur  $> 1$  ne divise à la fois  $x, y, z, t$ . Or il n'y a jamais de telles solutions quand  $n$  est divisible par 9, vu qu'alors tous les entiers  $x, y, z, t$  sont divisibles nécessairement par le facteur commun 3, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. Si donc on pose, comme ci-dessus,

$$n = 3^{\alpha} q,$$

$q$  étant un entier premier à 3, on aura

$$M = 0$$

toutes les fois que l'exposant  $\alpha$  sera  $> 1$ .

Restent les valeurs  $\alpha = 0, \alpha = 1$ , d'où les entiers

$$n = q, \quad n = 3q,$$

pour lesquelles la valeur de  $M$  sera la même. Voici de quelle fonction numérique de  $q$ ,  $M$  dépend alors. Soient  $a, b, \dots$ , les facteurs premiers de  $q$ , en sorte que

$$q = a^{\mu} b^{\nu} \dots,$$

et posons

$$Z_1(q) = (a^{\mu} + a^{\mu-1}) (b^{\nu} + b^{\nu-1}) \dots;$$

nous aurons, dans les conditions indiquées,

$$M = 12 Z_1(q).$$

On reconnaît dans la fonction

$$Z_1(q)$$

une fonction numérique déjà employée par nous, et antérieurement employée aussi par Eisenstein à l'occasion du nombre des représentations propres d'un entier impair par une somme de quatre carrés.

Ici l'entier  $q$ , qui figure dans

$$Z_1(q),$$

est premier à 3, mais indifféremment pair ou impair, et quand il est pair le facteur 2 est compris dans les facteurs  $a, b, \dots$ , dont il a été question plus haut. Soit, par exemple,

$$q = 500 = 2^2 \cdot 5^3,$$

on aura

$$Z_4(q) = (2^2 + 2)(5^3 + 5^2) = 900;$$

et par suite le nombre M des représentations propres de chacun des deux entiers

$$500, \quad 1500$$

par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$$

sera égal au produit

$$12 \cdot 900,$$

c'est-à-dire égal à

$$10800.$$

