

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 129-133.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_129_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

se rattache aussi aux questions traitées ci-dessus. Il faut, cette fois encore, poser

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3 et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro; après quoi on forme la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

La recherche du nombre

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$$

dépend en effet surtout de la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

que nous désignons par la simple lettre

$$\Sigma.$$

2. Quand on a $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair

$$3^\beta m,$$

je trouve que

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right) \right] \Sigma.$$

En particulier si l'on prend $\beta = 0$ et si l'on ne considère que les entiers impairs premiers à 3, lesquels sont susceptibles, relativement au module 6, des deux formes distinctes

$$6l + 1$$

ou

$$6l - 1,$$

on a

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = 2 \Sigma$$

quand

$$m = 6l + 1,$$

mais

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = 4 \Sigma$$

quand

$$m = 6l - 1.$$

S'il s'agit d'un entier pair, $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 0$, la valeur de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

est

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3} \right) \right] \left[2^{\alpha} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}} \right] \Sigma.$$

On voit donc que les deux cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha > 0$ sont absolument distincts.

3. Donnons maintenant le nombre des solutions propres de l'équation

$$2^{\alpha} 3^{\beta} m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

et à cet effet introduisons, comme dans les articles précédents, au lieu de la somme

$$\Sigma$$

le produit

$$\Pi = \left[a^{\mu} + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3} \right) a^{\mu-1} \right] \left[b^{\nu} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{3} \right) b^{\nu-1} \right] \dots$$

qu'on forme à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de l'entier

$$m = a^{\mu} b^{\nu} \dots;$$

il faudra considérer successivement les entiers impairs, les entiers impairement pairs, les multiples de 4 non divisibles par 8, et enfin les multiples de 8.

S'il s'agit d'un entier impair m , non divisible par 3, le nombre demandé s'exprimera par

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3} \right) \right] \Pi;$$

c'est-à-dire par

$$2 \Pi$$

si

$$m = 6l + 1,$$

mais par

$$4 \Pi$$

si $m = 6l - 1$.

Pour un multiple impair de 3, non de 9, comme $3m$, il faut prendre

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \Pi;$$

et enfin s'il s'agit d'un multiple impair de 9, $3^\beta m$ avec $\beta > 1$, ce sera

$$8.3^{\beta-1} \Pi.$$

Passons aux entiers impairement pairs $2.3^\beta m$. L'expression du nombre cherché sera

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \Pi$$

si $\beta = 0$, mais

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \Pi$$

si $\beta = 1$, enfin

$$8.3^{\beta-1} \left[2 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \Pi$$

si l'on a $\beta > 1$.

Pour les multiples de 4, non de 8, $4.3^\beta m$, on aura, si $\beta = 0$, l'expression suivante :

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[3 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \Pi;$$

mais, si $\beta = 1$, celle-ci

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[3 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \Pi;$$

enfin, si β est > 1 , ce sera

$$8.3^{\beta-1} \left[3 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \Pi.$$

En dernier lieu viennent les multiples de 8, représentés par $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 2$. Pour ceux-là, suivant que l'on a $\beta = 0$, ou $\beta = 1$, ou enfin $\beta > 1$, l'expression du nombre cherché est

$$3 \cdot 2^{\alpha-2} \left[3 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3} \right) \right] \text{II},$$

ou bien

$$3 \cdot 2^{\alpha-2} \left[9 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3} \right) \right] \text{II},$$

ou enfin

$$2^{\alpha+1} 3^\beta \text{II}.$$

