

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Sur la forme  $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 2<sup>e</sup> série, tome 8 (1863), p. 105-114.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1863\\_2\\_8\\_105\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8_105_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque  $n$ , on demande une règle simple pour calculer à priori le nombre  $N$ , ou  $N(n)$ , des représentations de  $n$  par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

c'est-à-dire le nombre  $N(n)$  des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

où  $x, y, z, t$  désignent des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme les nombres premiers 2 et 3, quand ils divisent  $n$ , jouent un rôle tout spécial dans la formule qui détermine  $N(n)$ , nous poserons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

$m$  étant un entier impair, non divisible par 3, et les exposants  $\alpha, \beta$  pouvant se réduire à zéro.

Eisenstein s'est occupé en 1847 (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) du cas particulier de  $\alpha = 0, \beta = 0, n = m$ , c'est-à-dire du cas particulier où l'on ne considère qu'un entier impair non divisible par 3. La règle qu'il indique sans démonstration pour trouver  $N(m)$  consiste à chercher l'excès de la somme des diviseurs de  $m$  compris dans la formule  $12g \pm 1$  sur la somme des diviseurs de  $m$  compris dans la formule  $12g \pm 5$  : on en conclut la valeur de  $N(m)$  en multipliant l'excès dont il s'agit (et qui est tantôt positif, tantôt négatif) par les

facteurs numériques respectifs

$$6, \quad -12, \quad -2, \quad 4$$

suivant que  $m$  est de l'une des quatre formes linéaires

$$12k + 1, \quad 12k + 5, \quad 12k - 5, \quad 12k - 1,$$

dans lesquelles sont contenus tous les entiers impairs non divisibles par 3.

Décomposons  $m$  en deux facteurs  $d, \delta$  de toutes les manières possibles, en sorte que  $m = d\delta$ . En employant une notation de Legendre, on a

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) = 1$$

quand

$$d = 12g \pm 1,$$

tandis que

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) = -1$$

quand

$$d = 12g \pm 5.$$

L'excès de la somme des diviseurs  $d$  compris dans la formule  $12g \pm 1$  sur la somme des diviseurs  $d$  compris dans la formule  $12g \pm 5$  s'exprime donc par la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d.$$

La règle d'Eisenstein revient dès lors aux quatre équations ci-après : pour  $m = 12k + 1$ ,

$$N(m) = 6 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d;$$

pour  $m = 12k + 5$ ,

$$N(m) = -12 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d;$$

pour  $m = 12k - 5$ ,

$$N(m) = -2 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d;$$

enfin, pour  $m = 12k - 1$ ,

$$N(m) = 4 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d.$$

On peut substituer à la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d$$

une autre fonction numérique de même valeur absolue, mais qui a l'avantage d'exprimer toujours un nombre positif. Cette fonction nouvelle est

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

On la trouve égale à

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d$$

quand  $m = 12k \pm 1$ , vu qu'alors on a

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right),$$

mais égale et de signe contraire quand  $m = 12k \pm 5$ , attendu que dans ce dernier cas

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) = -(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right),$$

comme il est aisé de s'en assurer.

On peut donc poser, pour  $m = 12k + 1$ ,

$$N(m) = 6 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

pour  $m = 12k + 5$ ,

$$N(m) = 12 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

pour  $m = 12k - 5$ ,

$$N(m) = 2 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

enfin, pour  $m = 12k - 1$ ,

$$N(m) = 4 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

Mais je réunis ces quatre formules en une seule, en écrivant

$$N(m) = \left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \sum,$$

où, pour abrégér, je mets simplement  $\sum$ , au lieu de

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

2. La règle d'Eisenstein ne s'appliquant ni aux entiers impairs multiples de 3, ni aux entiers pairs premiers à 3, ni à fortiori aux entiers pairs et multiples de 3, nous avons dû non-seulement constater au moyen de nos *formules générales* l'exactitude de ses énoncés, mais aussi en chercher d'autres pour les cas qu'il a omis et qui ont leurs difficultés propres.

Qu'il s'agisse d'abord d'un entier  $n$  impair, mais multiple de 3, et soit

$$n = 3^\beta m,$$

l'entier  $m$  étant premier à 3. Continuons à désigner par la simple lettre  $\sum$  la fonction numérique de  $m$  employée plus haut. Nous aurons

$$N(3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \sum.$$

Cette formule convient même au cas de  $\beta = 0$  : elle redonne alors la valeur de  $N(m)$  inscrite à la fin du n° 1.

Pour  $\beta = 1$ , et en distinguant les quatre formes linéaires dont  $m$  est susceptible relativement au module 12, on a les équations spéciales que voici : quand  $m = 12k + 1$ ,

$$N(3m) = 10 \sum;$$

quand  $m = 12k + 5$ ,

$$N(3m) = 8 \sum;$$

quand  $m = 12k - 5$ ,

$$N(3m) = 30 \sum;$$

enfin, quand  $m = 12k - 1$ ,

$$N(3m) = 24 \sum.$$

Passons aux entiers  $n$  non divisibles par 3, mais pairs, de façon que

$$n = 2^\alpha m,$$

$m$  étant impair et premier à 3. En conservant à  $\sum$  sa signification, je trouve cette fois

$$N(2^\alpha m) = \left[ 3 - (-1)^\alpha \left( \frac{m}{3} \right) \right] \left[ 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha + \frac{m-1}{2}} \right] \sum.$$

En prenant  $\alpha = 0$ , on retrouverait la valeur déjà donnée de  $N(m)$ .

En prenant  $\alpha = 1$ , on a, pour  $m = 12k + 1$ ,

$$N(2m) = 12 \sum;$$

pour  $m = 12k + 5$ ,

$$N(2m) = 6 \sum;$$

pour  $m = 12k - 5$ ,

$$N(2m) = 20 \sum;$$

pour  $m = 12k - 1$ ,

$$N(2m) = 10 \sum.$$

Considérons enfin un entier quelconque  $n$  mis sous la forme

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

$m$  étant impair et premier à 3. Pour avoir

$$N(2^\alpha 3^\beta m),$$

on cherchera encore la fonction de  $m$  désignée par  $\sum$ , puis on la multipliera par le produit des deux facteurs

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right)$$

et

$$2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

qui dépendent à la fois de  $m$  et des exposants  $\alpha, \beta$ . En d'autres termes

$$N(2^\alpha 3^\beta m) = \left[ 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right) \right] \left[ 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}} \right] \sum.$$

Cette formule remarquable est absolument générale et l'on peut y attribuer aux exposants  $\alpha, \beta$  toutes les valeurs possibles, même la valeur zéro.

5. On voit que la fonction numérique de  $m$  marquée par la lettre

$$\sum$$

et définie, au moyen des facteurs conjugués  $d, \delta$  de  $m$ , par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

joue dans la valeur de

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

le rôle le plus considérable, quoique d'autres éléments y aient aussi de l'influence.

En donnant avec Jacobi une extension utile au symbole de Legendre qui figure dans nos formules, on peut écrire

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) = \left(\frac{3}{\delta}\right),$$

et la fonction  $\sum$  devient

$$\sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d.$$

Cette forme est celle qu'on doit préférer pour mettre en évidence certaines analogies; mais dans l'usage ordinaire elle est moins commode.

La somme  $\sum$  peut s'exprimer par un produit. Il est aisé de s'assurer en effet que si  $a, b, \dots$  désignent les facteurs premiers distincts de  $m$ , en sorte que

$$m = a^\mu b^\nu \dots,$$

la valeur de  $\sum$  sera celle du produit des facteurs ci-après

$$\begin{aligned} & a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-1} + a^{\mu-2} + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-3} + \dots, \\ & b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{3}\right) b^{\nu-1} + b^{\nu-2} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{3}\right) b^{\nu-3} + \dots, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, des facteurs

$$\begin{aligned} & a^\mu + \left(\frac{3}{a}\right) a^{\mu-1} + a^{\mu-2} + \left(\frac{3}{a}\right) a^{\mu-3} + \dots, \\ & b^\nu + \left(\frac{3}{b}\right) b^{\nu-1} + b^{\nu-2} + \left(\frac{3}{b}\right) b^{\nu-3} + \dots, \\ & \dots \dots \dots ; \end{aligned}$$

on voit par là que la valeur de  $\sum$  est essentiellement  $> 0$ . Pour

$m = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25$ , etc., les valeurs respectives de  $\sum$  sont  $1, 4, 6, 12, 14, 16, 18, 24, 21$ , etc.

4. La formule générale donnée pour

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

résout complètement la question que nous nous étions proposée. Mais nous ajouterons une remarque utile en décomposant la valeur totale de

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

en deux parties séparées

$$N'(2^\alpha 3^\beta m), \quad N''(2^\alpha 3^\beta m),$$

dont elle sera la somme, et qui exprimeront les nombres de solutions de l'équation indéterminée

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour les deux cas distincts de  $z^2 + 3t^2$  entier impair et de  $z^2 + 3t^2$  entier pair.

On a en effet pour  $z^2 + 3t^2$  impair

$$N'(2^\alpha 3^\beta m) = 2^\alpha \left[ 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{m}{3} \right) \right] \sum$$

et pour  $z^2 + 3t^2$  pair

$$N''(2^\alpha 3^\beta m) = \left[ 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left( \frac{m}{3} \right) \right] \left[ 2^\alpha + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}} \right] \sum,$$

formules desquelles résultent de nombreuses conséquences.

Je supprime, pour le moment, d'autres remarques d'une importance égale, qui pourront trouver leur place ailleurs.

5. Nous avons déterminé le nombre total

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

savoir

$$N(2^\alpha 3^\beta m) = \left[ 3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right) \right] \left[ 2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}} \right] \sum.$$

Mais on peut demander à part le nombre

$$M(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles aucun facteur  $> 1$  ne divise à la fois  $x, y, z, t$ . Pour cela, considérons l'entier  $m$  décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\mu b^\nu \dots,$$

puis formons le produit

$$\prod \left[ a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-1} \right]$$

dont les facteurs successifs sont

$$a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-1}, \quad b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}} b^{\nu-1}, \dots,$$

et que je désignerai par la simple lettre

$$\Pi.$$

On passera de la valeur de  $N(2^\alpha 3^\beta m)$  à celle de  $M(2^\alpha 3^\beta m)$  en remplaçant d'abord  $\sum$  par  $\Pi$ , mais de plus, si  $\beta$  est  $> 1$ , en remplaçant le facteur

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et, si  $\alpha$  est  $> 1$ , le facteur

$$2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^{\alpha-1}.$$

Cette règle s'accorde avec celle qu'Eisenstein a donnée pour le cas particulier de  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , le seul dont il se soit occupé : il suffit alors de changer  $\sum$  en  $\prod$ .

Je remarquerai en terminant que si l'on représente le produit  $\prod$  par  $P(m)$  et la somme  $\sum$  par  $Q(m)$ , on aura

$$Q(m) = P\left(\frac{m}{1^2}\right) + \dots + P\left(\frac{m}{D^2}\right) + \dots,$$

$D$  représentant les diviseurs de  $m$  dont le carré  $D^2$  divise aussi  $m$ . ce qui arrive toujours pour  $D = 1$  par exemple.

