

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Nouveau théorème concernant le quadruple d'un nombre
premier de la forme $12\kappa + 5$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 8 (1863), p. 102-104.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__102_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LE QUADRUPLÉ D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $12k + 5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On pourra joindre ce théorème à ceux que nous avons donnés dans le cahier de mars 1861, page 93. Voici en quoi il consiste :

Soit m un nombre premier donné, de la forme $12k + 5$. Je dis que son quadruple $4m$ vérifiera au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = 3x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

où x, y sont des entiers impairs et p un nombre premier non diviseur de y . Comme d'ordinaire, nous admettons pour l la valeur zéro.

Cet énoncé n'impose au nombre premier p aucune condition; mais par la nature même du nombre donné m , l'équation

$$4m = 3x^2 + p^{4l+1}y^2$$

entraîne les deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{8}, \quad p \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ainsi p ne peut être que de la forme $24g + 17$.

On présentera notre théorème sous un point de vue plus commode en disant que si du quadruple $4m$ d'un nombre premier donné, de la forme $12k + 5$, on retranche tant que faire se peut les entiers

$$3.1^2, 3.3^2, 3.5^2, 3.7^2, \dots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la

forme

$$p^{4l+1} \gamma^2,$$

p étant un nombre premier ($24g + 17$) qui ne divise pas γ .

Les nombres premiers de la forme $12k + 5$ forment la suite

$$5, 17, 29, 41, 53, 89, 101, 113, \dots;$$

vérifions notre théorème sur quelques-uns de ces nombres.

Pour $m = 5$ (d'où $4m = 20$), on n'a qu'un seul reste

$$20 - 3.1^2 = 17.1^2;$$

mais ce reste a, comme il le faut, la forme canonique.

Pour $m = 17$ (d'où $4m = 68$), il vient d'abord

$$68 - 3.1^2 = 65 = 5.13,$$

ce qui ne fournit pas un reste canonique; mais le reste suivant

$$68 - 3.3^2 = 41.1^2$$

a la forme voulue, et le théorème subsiste.

Pour $m = 29$, $4m = 116$, les trois restes qu'on trouve sont canoniques :

$$116 - 3.1^2 = 113.1^2,$$

$$116 - 3.3^2 = 89.1^2,$$

$$116 - 3.5^2 = 41.1^2.$$

Pour $m = 41$, $4m = 164$, on a aussi trois restes canoniques

$$164 - 3.3^2 = 137.1^2,$$

$$164 - 3.5^2 = 89.1^2,$$

$$164 - 3.7^2 = 17.1^2,$$

plus un reste non canonique qui est

$$164 - 3.1^2 = 161 = 7.23.$$

Enfin on a également trois restes canoniques pour

$$m = 89$$

et pour

$$m = 101,$$

savoir, d'une part,

$$4. 89 - 3.1^2 = 353.1^2,$$

$$4. 89 - 3.5^2 = 281.1^2,$$

$$4. 89 - 3.9^2 = 113.1^2,$$

et, d'autre part,

$$4.101 - 3.1^2 = 401.1^2,$$

$$4.101 - 3.7^2 = 257.1^2,$$

$$4.101 - 3.11^2 = 41.1^2.$$

Je me dispense d'écrire les restes non canoniques et je ne pousserai pas plus loin ces calculs. On peut être assuré que toujours notre théorème serait vérifié.

