JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 73-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__73_0>

SUR LA FORME

$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Il est bien clair que l'on aura $N = 0$ si l'entier n est impair et de la forme $4l + 3$. On aura aussi $N = 0$ si m est le double d'un entier impair quelconque. Mais dans tous les autres cas on aura $N > 0$; et la valeur de N dépendra surtout de la fonction numérique $\zeta_1(m)$, qui exprime la somme des diviseurs de m : on pourra en outre avoir à calculer la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

des entiers positifs i figurant dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^3,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

2. Soit d'abord n impair, $n = m = 4l + 1$. On aura

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Ainsi, pour $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$, on aura

$$\zeta_1(m) = 1, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = 1;$$

donc

$$N = 2,$$

ce qui est confirmé par l'équation double

$$1 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$, on a

$$\zeta_1(m) = 6, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = 2,$$

donc

$$N = 8.$$

Les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

confirment ce fait.

Soit encore $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$; il viendra

$$\zeta_1(9) = 13, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -3,$$

donc

$$N = 10;$$

et on a en effet pour l'entier 9 dix représentations fournies par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Pour $m = 13 = 3^2 + 4(\pm 1)^2$, on a

$$\zeta_1(m) = 14, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -6,$$

d'où

$$N = 8;$$

et 13 n'a réellement que les huit représentations indiquées par

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

Soit enfin $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Ayant

$$\zeta_1(m) = 18, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} = 2,$$

on en conclura

$$N = 20.$$

Or on trouve pour l'entier 17 vingt représentations ainsi qu'il suit :

$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 2)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 16.0^2.$$

3. Soit à présent n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. Il est clair que dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

on doit avoir en nombres entiers $x = 2x_1$. En divisant par 4, il viendra donc

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y^2 + z^2 + 4t^2,$$

ce qui nous ramène à une équation dont nous nous sommes occupés (cahier de décembre 1861). On est ainsi conduit, pour le nombre des représentations de l'entier pairement pair (n ou $2^\alpha m$) par la forme actuelle

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

aux conclusions suivantes :

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 6\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$, mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 3$.

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

3° Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a de même une formule unique

$$N = 8\zeta_1(m).$$

4° Enfin pour n divisible par 32 avec quotient pair ou impair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a constamment

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelque grand que puisse devenir l'exposant α et quelle que soit la forme linéaire de m.

Je ne m'arrêterai pas à la recherche des solutions propres, m'en référant sur ce point à la méthode générale qui s'offre d'elle-même.