

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Démonstration d'un théorème d'Abel

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 7 (1862), p. 253-255.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__253_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ABEL;

NOTE DE M. LEJEUNE-DIRICHLET,

COMMUNIQUÉE PAR M. LIOUVILLE.

Il s'agit de prouver que si la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

est convergente et a pour somme A, la somme de la série

$$a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_n \rho^n + \dots,$$

qui sera convergente à fortiori en prenant la variable ρ positive et < 1 , tendra vers la limite A lorsque l'on fera tendre indéfiniment ρ vers l'unité. Causant un jour avec mon excellent et si regrettable ami Lejeune-Dirichlet, je lui disais que je trouvais assez difficile à exposer (et même à comprendre) la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important. Dirichlet se mit sur-le-champ à écrire sous mes yeux, dans le seul but de me venir en aide, la Note ci-après, qui m'a été d'un grand secours et qu'en me saura gré de livrer au public. Le mode de démonstration qu'on y trouve comporte de nombreuses applications et m'a été souvent utile dans mes leçons au Collège de France.

Je transcris textuellement la Note de Dirichlet sans y rien ajouter, et bien entendu sans y rien changer.

« Il résulte de la convergence supposée de la série

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \text{etc.}$$

» que la somme

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

- » reste toujours numériquement inférieure à une certaine constante k
 » et converge vers la limite A , lorsque n croît indéfiniment. Considé-
 » rons maintenant la série

$$S = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_n \rho^n + \text{etc.},$$

- » la quantité ρ étant supposée positive et inférieure à l'unité; en y
 » remplaçant a_0, a_1, a_2 , etc., par $s_0, s_1 - s_0, s_2 - s_1$, etc., elle prendra
 » la forme

$$S = s_0 + (s_1 - s_0) \rho + (s_2 - s_1) \rho^2 + \dots + (s_n - s_{n-1}) \rho^n + \text{etc.},$$

- » et ensuite celle-ci, en ordonnant autrement,

$$S = (1 - \rho)(s_0 + s_1 \rho + s_2 \rho^2 + \dots + s_n \rho^n + \dots),$$

- » transposition qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'elle se réduit à
 » ajouter à la somme des $n + 1$ premiers termes le terme $-s_n \rho^{n+1}$
 » qui s'évanouit pour $n = \infty$.

- » Voyons maintenant vers quelle limite converge S lorsque la va-
 » riable positive $\varepsilon = 1 - \rho$ devient infiniment petite. Décomposons pour
 » cela S en deux parties, comprenant l'une les n premiers termes et
 » l'autre tous les termes suivants, et faisons croître n à mesure que ε
 » décroît, mais assez lentement pour que la limite de $n\varepsilon$ soit zéro. La
 » première partie

$$(1 - \rho)(s_0 + s_1 \rho + \dots + s_{n-1} \rho^{n-1}),$$

- » étant numériquement moindre que $n\varepsilon k$, converge vers zéro. Quant à
 » la seconde

$$(1 - \rho)(s_n \rho^n + s_{n+1} \rho^{n+1} + \dots),$$

- » on pourra lui donner la forme

$$P(1 - \rho)(\rho^n + \rho^{n+1} + \dots) = P\rho^n = P(1 - \varepsilon)^n,$$

- » P désignant une valeur comprise entre la plus grande et la plus pe-

» tite des quantités $s_n, s_{n+1}, \dots$. Or ces dernières convergeant toutes vers
 » la limite A, il en sera de même pour P, et comme d'un autre côté le
 » facteur $(1 - \epsilon)^n$, en vertu de l'hypothèse faite plus haut, converge
 » évidemment vers l'unité, il est prouvé que la limite de S, lorsque la
 » variable positive $\rho < 1$ s'approche indéfiniment de l'unité, est la
 » somme même A de la série considérée en premier lieu. »

Je ne pense pas que personne puisse songer désormais à demander
 de nouveaux éclaircissements.

