

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Sur la forme  $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 2<sup>e</sup> série, tome 7 (1862), p. 249-252.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1862\\_2\\_7\\_\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__249_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre  $N$  des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2,$$

ne peut nous offrir aucune difficulté quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, on a évidemment  $N = 0$ . Et s'il est pairement pair, de sorte qu'on puisse le représenter par  $2^\alpha m$  en prenant  $m$  impair et  $\alpha > 1$ , l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$$

exigera que  $x$  soit pair,  $x = 2x_1$ , par conséquent se ramènera à celle-ci

$$2^{\alpha-2}m = x_1^2 + 2y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui a été l'objet d'une discussion détaillée dans le cahier de mai.

Quant au cas d'un entier impair  $m$ , j'observe que l'on a  $N = 0$ , si  $m$  est de l'une des trois formes  $8\mu + 3$ ,  $8\mu + 5$ ,  $8\mu + 7$ . Nous supposerons donc désormais

$$m = 8\mu + 1,$$

et voici comment nous calculerons alors  $N$ .

Il faudra d'abord chercher la valeur de la fonction  $\omega_1(m)$ , définie, comme à l'ordinaire, par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d;$$

puis former, d'une part, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

relative aux entiers positifs  $r$  qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2$$

où l'entier  $u$  est indifféremment positif, nul ou négatif, et, d'autre part, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2} + \frac{i^2-1}{8}} i$$

relative aux entiers positifs  $i$  qui peuvent se présenter dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

où l'entier  $s$ , quand il n'est pas zéro, devra être pris négativement comme positivement.

Cela posé, on aura

$$N = \frac{1}{2} \left[ \omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r \right] + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2} + \frac{i^2-1}{8}} i.$$

Ainsi pour  $m = 1 = 1^2 + 2 \cdot 0^2 = 1^2 + 4 \cdot 0^2$ , on a

$$N = \frac{1}{2} (1 + 1) + 1 = 2,$$

ce qui s'accorde avec la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2 + 64 \cdot 0^2.$$

Pour  $m = 9$ , on a les équations

$$9 = 3^2 + 2 \cdot 0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2, \quad 9 = 3^2 + 4 \cdot 0^2;$$

d'ailleurs

$$\omega_1(9) = 9 - 3 + 1 = 7.$$

Il vient donc cette fois

$$N = \frac{1}{2} (7 - 3 + 2) + 3 = 6,$$

résultat confirmé par les équations

$$\begin{aligned} 9 &= (\pm 3)^2 + 8 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2 + 64 \cdot 0^2, \\ 9 &= (\pm 1)^2 + 8 (\pm 1)^2 + 16 \cdot 0^2 + 64 \cdot 0^2, \end{aligned}$$

qui fournissent pour l'entier 9 six représentations.

Pour  $m = 17$ , comme  $\omega_1(17) = 18$ , et que l'on a

$$17 = 3^2 + 2 (\pm 2)^2, \quad 17 = 1 + 4 (\pm 2)^2,$$

je trouve

$$N = \frac{1}{2} (18 - 6) + 2 = 8;$$

et cela s'accorde avec les équations

$$\begin{aligned} 17 &= (\pm 1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 16 (\pm 1)^2 + 64 \cdot 0^2, \\ 17 &= (\pm 3)^2 + 8 (\pm 1)^2 + 16 \cdot 0^2 + 64 \cdot 0^2, \end{aligned}$$

qui donnent pour 17 huit représentations.

Pour  $m = 25$ , il faut considérer les équations

$$25 = 5^2 + 2 \cdot 0^2, \quad 25 = 5^2 + 4 \cdot 0^2, \quad 25 = 3^2 + 4 (\pm 2)^2,$$

d'ailleurs  $\omega_1(25) = 25 - 5 + 1 = 21$  : donc

$$N = \frac{1}{2} (21 + 5) - 5 + 6 = 14;$$

or 25 a en effet quatorze représentations exprimées par les égalités multiples

$$\begin{aligned} 25 &= (\pm 5)^2 + 8 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2 + 64 \cdot 0^2, \\ 25 &= (\pm 3)^2 + 8 \cdot 0^2 + 16 (\pm 1)^2 + 64 \cdot 0^2, \\ 25 &= (\pm 1)^2 + 8 (\pm 1)^2 + 16 (\pm 1)^2 + 64 \cdot 0^2. \end{aligned}$$

Pour  $m = 33$ , les équations à considérer, savoir

$$33 = 1^2 + 2(\pm 4)^2, \quad 33 = 5^2 + 2(\pm 2)^2,$$

appartiennent toutes les deux au type

$$m = r^2 + 2u^2;$$

il n'y en a point pour le type

$$m = i^2 + 4s^2.$$

Comme d'ailleurs

$$\omega_1(33) = 33 - 11 - 3 + 1 = 20,$$

notre formule donne

$$N = \frac{1}{2} (20 + 2 + 10) = 16;$$

ce qui s'accorde avec les égalités

$$33 = (\pm 5)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16.0^2 + 64.0^2,$$

$$33 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$

$$33 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 2)^2 + 16.0^2 + 64.0^2.$$

Pour  $m = 41, 49, 57$ , notre formule donne respectivement  $N = 8, 18, 16$ ; mais je passe à  $m = 65$ , et là trouvant

$$\omega_1(65) = 65 - 5 - 13 + 1 = 48,$$

ayant d'ailleurs à considérer les équations

$$65 = 1^2 + 4(\pm 4)^2, \quad 65 = 7^2 + 4(\pm 2)^2,$$

j'obtiens

$$N = 12;$$

et je vois que dans ce dernier exemple, comme dans tous ceux qu'on voudrait ajouter, notre formule est vérifiée, les égalités

$$65 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 2)^2 + 64.0^2,$$

$$65 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 16.0^2 + 64(\pm 1)^2,$$

$$65 = (\pm 7)^2 + 8.0^2 + 16(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$

fournissant effectivement douze représentations.

