

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 7 (1862), p. 205-208.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__205_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \dots$) par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2;$$

et cette fois encore nous aurons besoin, tant de la fonction $\omega_1(m)$ définie par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d,$$

que de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r$$

qui se rapporte aux entiers positifs r figurant dans l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif.

Soit d'abord n impair, $n = m$. On aura

$$N = 2 \left[\omega_1(m) + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r \right].$$

Cette formule est générale; mais pour les entiers m de l'une des deux

formes $8k - 3$, $8k - 1$, elle se simplifie d'elle-même et se réduit à

$$N = 2\omega_1(m),$$

attendu que l'équation $m = r^2 + 2u^2$ est alors impossible.

Prenons d'abord $m = 1 = 1^2 + 2 \cdot 0^2$. Notre formule donnera $N = 4$; et cela s'accorde avec les équations

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$1 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2,$$

qui donnent pour l'entier 1 quatre représentations.

Soit ensuite $m = 3 = 1^2 + 2(\pm 1)^2$. Il nous viendra

$$N = 2(2 + 2) = 8.$$

Les équations

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$3 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16 \cdot 0^2,$$

confirment ce fait.

Faisons à présent $m = 5$. Nous aurons

$$N = 2\omega_1(5) = 8.$$

Cela s'accorde avec les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2.$$

Soit encore $m = 7$. Il nous viendra

$$N = 2\omega_1(7) = 16.$$

Or les équations

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$7 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 16 \cdot 0^2,$$

fournissent bien pour l'entier 7 seize représentations.

Pour $m = 9$, comme on a

$$9 = 3^2 + 2 \cdot 0^2$$

et

$$9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

la valeur de N sera

$$N = 2(7 - 3 + 2) = 12.$$

Cela est confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$9 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 16 \cdot 0^2,$$

$$9 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 16 \cdot 0^2,$$

qui donnent pour l'entier 9 douze représentations.

Pour

$$m = 11, \quad m = 13, \quad m = 15, \quad m = 17, \dots,$$

notre formule donne respectivement

$$N = 8, \quad N = 24, \quad N = 16, \quad N = 24, \dots;$$

mais je m'arrête dans ces exercices numériques.

Maintenant supposons n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

se ramènera alors à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 8T^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Mais cette dernière équation s'est déjà présentée à nous (cahier de septembre 1861). D'après cela, on arrive aisément, pour le nombre N des représentations

d'un entier pair n , par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 16t^2,$$

aux conclusions suivantes.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = 6\omega_1(m)$$

si m est de l'une des deux formes $8k + 1$, $8k - 3$; mais

$$N = 4\omega_1(m)$$

si $m = 8k + 3$, et

$$N = 0$$

si $m = 8k - 1$.

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$N = 12\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m .

Enfin pour m divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, on a

$$N = 2(2^{\alpha-1} - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^{\alpha-1} + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

