

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme  $8\mu + 1$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 7 (1862), p. 19-20.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1862\\_2\\_7\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__19_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

# NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME  $8\mu + 1$ ;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit  $m$  un nombre premier donné, de la forme  $8\mu + 1$ . Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = 16x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

$x, y$  étant des entiers positifs,  $x$  pair ou impair à volonté,  $y$  naturellement impair. Quant à  $p$ , c'est un nombre premier  $(8\nu + 1)$  qui ne divise pas  $y$ . On admet pour  $l$  la valeur zéro. Il s'agit d'indiquer une règle simple qui dise à priori si le nombre  $N$  des décompositions de  $m$  ainsi obtenues est pair ou impair. Dans le cas de  $N$  impair, on est sûr qu'il y a au moins une décomposition.

Pour répondre à cette question, il faut d'abord mettre  $m$  sous la forme

$$m = a^2 + 16b^2,$$

ce qu'on peut faire d'une seule manière. On cherchera ensuite le nombre  $\sigma$  des facteurs premiers (égaux ou inégaux) des deux formes  $8k + 1, 8k + 3$ , qui entrent dans la composition de  $a$ . La règle demandée sera fournie alors par la congruence

$$N \equiv b + \sigma + 1 \pmod{2}.$$

Ainsi  $N$  est impair quand  $b$  et  $\sigma$  sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Mais  $N$  est pair quand  $b$  est pair et  $\sigma$  impair, et quand  $b$  est impair et  $\sigma$  pair.

Soit d'abord

$$m = 17 = 1^2 + 16.1^2.$$

On aura  $\sigma = 1$ ,  $b = 1$ , donc  $N$  pair. Or il est évident que  $N = 0$ .

Soit en second lieu

$$m = 41 = 5^2 + 16.1^2.$$

On aura encore  $\sigma = 0$ ,  $b = 1$ , donc  $N$  pair; et il est aisé de s'assurer que cette fois encore  $N = 0$ .

Il en est de même pour

$$m = 3^2 + 16.2^2 = 73,$$

nombre premier  $8\mu + 1$  pour lequel  $\sigma = 1$  et  $b = 2$ .

Mais pour

$$m = 89 = 5^2 + 16.2^2,$$

on a  $b = 2$ ,  $\sigma = 0$ . Donc  $N$  doit être impair. Et en effet on a cette fois une décomposition canonique :

$$89 = 16.1^2 + 73.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

