JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 155-156.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__155_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande le nombre N des représentations d'un entier donné n (ou $2^\alpha m$, m impair, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2.$$

Le cas de n impair, $n = m$, est très-simple. En effet, dans l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

l'un quelconque des deux entiers x, y est pair, l'autre impair. Le nombre des solutions se réduira donc à moitié si l'on exige que l'entier pair soit toujours placé le second. Mais alors ayant $y = 2y_1$, on peut écrire

$$m = x^2 + 2z^2 + 4y_1^2 + 8t^2.$$

Or nous avons discuté cette dernière équation dans le cahier de novembre 1861. De là résulte, pour le nombre N des représentations d'un entier impair m par la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

l'expression suivante

$$\mathrm{N} = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m, tandis que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapporte aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif.

Le cas de n pair n'est pas moins facile, attendu que quand l'exposant α est > 0, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

se ramène à celle-ci :

$$2^{\alpha-1} m = X^2 + Y^2 + Z^2 + 4T^2,$$

sans que le nombre des solutions soit changé. Or nous avons discuté cette dernière équation dans le cahier de décembre 1861. D'après cela, je trouve, relativement au nombre N des représentations d'un entier pair n, par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

les théorèmes suivants.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$N = \left[4 + 2(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m).$$

Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, il vient

$$N = 12\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour n divisible par 16, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a invariablement

$$N = 24\zeta_1(m),$$

si grand que α puisse devenir.