

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

Sur la forme  $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 2<sup>e</sup> série, tome 7 (1862), p. 153-154.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1862\\_2\\_7\\_\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__153_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour trouver le nombre  $N$  des représentations d'un entier donné  $n$  (ou  $2^\alpha m$ ,  $m$  impair,  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ) par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

on n'a en quelque sorte à s'occuper que du cas de  $n$  impair,  $n = m$ . Encore est-il évident à priori que  $N = 0$  pour les entiers de l'une des deux formes  $8k + 5$ ,  $8k + 7$ . Mais pour  $n = m = 8k + 3$ , je trouve

$$N = \zeta_1(m),$$

$\zeta_1(m)$  désignant la somme des diviseurs de  $m$ . Pour  $n = m = 8k + 1$ , la formule (un peu plus compliquée) est

$$N = \zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

se rapportant aux entiers positifs  $i$  qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier  $s$  est indifféremment positif, nul ou négatif.

Relativement au cas de  $n$  pair,  $n = 2^\alpha m$ ,  $\alpha > 0$ , il suffit d'observer que pour que l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

ait lieu alors, il faut que  $x$  soit pair,  $x = 2x_1$ , de sorte qu'en divisant par 2 il vient

$$2^{\alpha-1}m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

équation que nous avons discutée dans le cahier de novembre 1861. De là découlent, pour le nombre  $N$  des représentations d'un entier pair  $n$  par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

les conséquences suivantes.

Pour  $n$  impairement pair,  $n = 2m$ , on a

$$N = \zeta_1(m) + \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si  $m = 8k + 1$ , mais

$$N = \zeta_1(m) - \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

si  $m = 8k + 5$ , enfin

$$N = \zeta_1(m)$$

si  $m = 8k + 3$  ou  $8k + 7$ .

Pour  $n$  divisible par 4, non par 8,  $n = 4m$ , on a

$$N = 2\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de  $m$ .

Pour  $n$  divisible par 8, non par 16,  $n = 8m$ , on a

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Pour  $n$  divisible par 16, non par 32,  $n = 16m$ , la formule est

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Enfin, pour  $n$  divisible par 32,  $n = 2^\alpha m$ ,  $\alpha > 4$ , il vient invariablement

$$N = 24\zeta_1(m).$$

