

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Théorème concernant le produit d'un nombre premier $8\mu + 3$
par le carré d'un nombre premier $8\nu + 7$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 6 (1861), p. 207-208.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6_207_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉOREME

CONCERNANT

LE PRODUIT D'UN NOMBRE PREMIER $8\mu + 3$ PAR LE CARRÉ
D'UN NOMBRE PREMIER $8\nu + 7$.

(EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LIOUVILLE A M. BESGE.)

« ... Voici un théorème assez curieux au sujet du produit d'un
» nombre premier donné m , de la forme $8\mu + 3$, par le carré d'un
» nombre premier a , donné aussi, mais de la forme $8\nu + 7$. On pose
» de toutes les manières possibles l'équation

$$a^2 m = x^2 + 2p^{4l+1} y^2,$$

» p étant un nombre premier (naturellement de la forme $4\nu + 1$) et
» x, y des entiers impairs, x non divisible par a , et y non divisible
» par p . Le théorème dont je parle fournit une règle très-simple pour
» décider à priori si le nombre N des décompositions de $a^2 m$ ainsi
» obtenues est pair ou impair. En employant le signe connu introduit
» par Legendre dans la théorie des résidus quadratiques, je trouve
» que N est impair quand

$$\left(\frac{a}{m}\right) = 1,$$

» c'est-à-dire quand a est résidu quadratique de m ; au contraire N
» est pair quand

$$\left(\frac{a}{m}\right) = -1,$$

» c'est-à-dire quand a est non résidu quadratique de m .

» On a un exemple très-simple du premier cas en prenant $m = 3$,
» $a = 7$. Comme

$$\left(\frac{7}{3}\right) = 1,$$

» on doit trouver alors N impair; et en effet $N = 3$, les équations canoniques étant

$$49.3 = 1^2 + 2.73.1^2,$$

$$49.3 = 5^2 + 2.61.1^2,$$

$$49.3 = 11^2 + 2.13.1^2.$$

» Vous aurez un exemple du second cas en prenant $m = 11$, $a = 7$.

» Comme

$$\left(\frac{7}{11}\right) = -1,$$

» notre théorème dit que N sera pair. Or on trouve en effet que

» $N = 6$. Voici les équations canoniques :

$$539 = 1^2 + 2.269.1^2,$$

$$539 = 5^2 + 2.257.1^2,$$

$$539 = 9^2 + 2.229.1^2,$$

$$539 = 15^2 + 2.157.1^2,$$

$$539 = 19^2 + 2.89.1^2,$$

$$539 = 23^2 + 2.5.1^2.$$

» Vous vous contenterez de ces deux exemples. Mais en terminant

» permettez-moi d'insister sur la condition de x non divisible par a :

» elle est essentielle. »

