

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Théorèmes concernant le quadruple d'un nombre premier contenu
dans l'une ou dans l'autre des deux formes $8\mu + 3$, $8\mu + 5$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 6 (1861), p. 1-6.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__1_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUADRUPLÉ D'UN NOMBRE PREMIER CONTENU DANS L'UNE
OU DANS L'AUTRE DES DEUX FORMES $8\mu + 3$, $8\mu + 5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le quadruple $(4m)$ d'un nombre premier donné m , de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires $8\mu + 3$, $8\mu + 5$, jouit de propriétés curieuses.

1° On peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = (8t + 1)^2 + p^{4l+1} \gamma^2,$$

t étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que γ est impair et positif; quant à p , c'est un nombre premier $(8\nu + 3)$ qui ne divise pas γ : on admet pour l la valeur zéro.

L'expression $(8t + 1)^2$, en y prenant t positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$8s + 1, \quad 8s - 1,$$

savoir

$$1^2, 7^2, 9^2, 15^2, 17^2, \dots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$4m - 1^2, 4m - 7^2, 4m - 9^2, 4m - 15^2, 4m - 17^2, \dots,$$

qu'on peut exprimer par

$$p^{4l+1} j^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de j et naturellement de la forme $8\nu + 3$.

2° On peut de même poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = (8t + 3)^2 + p^{4l+1} j^2,$$

t continuant à être un entier indifféremment positif, nul ou négatif, j un entier positif impair, et p un nombre premier $(8\nu + 3)$ qui ne divise pas j .

L'expression $(8t + 3)^2$, en y prenant t positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$8s + 3, \quad 8s - 3,$$

savoir

$$3^2, 5^2, 11^2, 13^2, 19^2, \dots;$$

notre second théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$4m - 3^2, 4m - 5^2, 4m - 11^2, 4m - 13^2, 4m - 19^2, \dots,$$

qu'on peut exprimer par

$$p^{4l+1} j^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de j et naturellement de la forme $8\nu + 3$.

Si, au lieu de considérer séparément les deux équations

$$4m = (8t + 1)^2 + p^{4l+1} y^2$$

et

$$4m = (8t + 3)^2 + p^{4l+1} y^2,$$

on avait voulu considérer l'équation unique

$$4m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

qui les renferme toutes deux en conservant à y et à p leur signification et en prenant pour x un entier impair (positif) quelconque, le nombre N des solutions de cette équation unique aurait été pair; et nos méthodes, en nous indiquant ce fait de $N \equiv 0 \pmod{2}$, n'auraient pas pu nous faire savoir que l'on n'a jamais $N = 0$. Au contraire, en décomposant l'équation

$$4m = x^2 + p^{4l+1} y^2$$

en deux autres, eu égard à la valeur de $x \pmod{8}$, nous décomposons aussi N en deux parties N_1, N_2 sur lesquelles nos méthodes ont prise. Réussissant alors à reconnaître que N_1 et N_2 sont des entiers impairs, nous pouvons en conclure que N est essentiellement > 0 . Il fallait séparer deux groupes de nombres, que l'équation unique mêlait mal à propos, pour obtenir des résultats précis.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer au sujet des nombres N , et N_2 sont aisés à établir. Mais nous nous bornerons ici à les vérifier numériquement sur les exemples les plus simples.

Commençons par les nombres premiers m de la forme

$$8\mu + 3.$$

Le plus petit est 3; or on a d'une part

$$4.3 = 1^2 + 11.1^2,$$

et d'autre part

$$4.3 = 3^2 + 3.1^2,$$

conformément à nos deux théorèmes. Vient ensuite $m = 11$, pour le-

quel on trouve

$$4.11 = 1^2 + 43.1^2$$

et

$$4.11 = 5^2 + 19.1^2.$$

Une vérification semblable a lieu pour $m = 19$, en vertu des équations canoniques

$$4.19 = 1^2 + 3.5^2$$

et

$$4.19 = 3^2 + 67.1^2;$$

l'équation

$$4.19 = 7^2 + 3^2.1^2$$

ne doit pas être comptée ici, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$.

En faisant encore

$$m = 43,$$

on a, d'un côté, l'équation canonique

$$4.43 = 1^2 + 19.3^2,$$

et, d'une autre part, ces trois-ci :

$$4.43 = 3^2 + 163.1^2,$$

$$4.43 = 5^2 + 3.7^2,$$

$$4.43 = 13^2 + 3.1^2.$$

Toujours nos théorèmes sont vérifiés : arrêtons-nous donc (quant à la forme $8\mu + 3$) au dernier exemple de

$$m = 59,$$

pour lequel les équations voulues sont

$$4.59 = 15^2 + 11.1^2$$

et

$$4.59 = 3^2 + 227.1^2,$$

$$4.59 = 5^2 + 211.1^2,$$

$$4.59 = 13^2 + 67.1^2.$$

Passons aux nombres premiers m de la forme

$$8\mu + 5.$$

Le plus petit de ces nombres est 5; or on a, d'une part,

$$4.5 = 1^2 + 19.1^2$$

et, d'autre part,

$$4.5 = 3^2 + 11.1^2,$$

conformément à nos deux théorèmes. Vient ensuite $m = 13$, pour lequel on trouve

$$4.13 = 7^2 + 3.1^2$$

et

$$4.13 = 3^2 + 43.1^2;$$

l'équation

$$4.13 = 5^2 + 3^3.1^2$$

ne doit pas être comptée ici parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$. Nos théorèmes sont également vérifiés pour $m = 29$, en vertu des équations canoniques

$$4.29 = 7^2 + 67.1^2$$

et

$$4.29 = 3^2 + 107.1^2.$$

Soit encore

$$m = 37 :$$

on aura semblablement les équations de forme voulue

$$4.37 = 1^2 + 3.7^2,$$

$$4.37 = 7^2 + 11.3^2,$$

$$4.37 = 9^2 + 67.1^2,$$

et

$$4.37 = 3^2 + 139.1^2;$$

l'équation

$$4.37 = 11^2 + 3^3.1^2$$

a dû être mise de côté par la raison déjà donnée plus haut que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$.

Enfin, soit

$$m = 53 :$$

il viendra les équations canoniques

$$4.53 = 1^2 + 211.1^2,$$

$$4.53 = 7^2 + 163.1^2,$$

$$4.53 = 9^2 + 131.1^2,$$

et

$$4.53 = 13^2 + 43.1^2.$$

Dans cet exemple, comme dans ceux qui précèdent et dans tous ceux qu'on pourrait ajouter, nos deux théorèmes ont lieu.

