

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Théorèmes concernant le quintuple d'un nombre  
premier de la forme  $24\kappa + 17$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 6 (1861), p. 147-149.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1861\\_2\\_6\\_\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__147_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

# THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUINTUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME  $24k + 17$ ;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous considérons ici le quintuple d'un nombre premier  $m$  de la forme  $24k + 17$ . Le nombre  $N$  de manières dont on peut poser, pour chaque entier  $m$  de l'espèce indiquée, l'équation

$$5m = 2x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

$x$  et  $y$  étant des entiers impairs et  $p$  un nombre premier non diviseur de  $y$ , est essentiellement pair, mais au moins égal à 2. Cela résultera des deux théorèmes qui font l'objet de cet article. On va le voir en effet,  $N$  est la somme de deux nombres impairs  $N_1$ ,  $N_2$  qui répondent respectivement aux deux hypothèses distinctes de  $x$  divisible par 3 et de  $x$  premier à 3. Quant à  $y$ , on s'assurera sans peine qu'il n'est jamais divisible par 3.

*Théorème I.* — « Pour tout nombre premier donné  $m$ , de la forme  
»  $24k + 17$ , on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre  
» impair de fois) l'équation

$$5m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

»  $x$  et  $y$  étant des entiers impairs et  $p$  un nombre premier non divi-  
» seur de  $y$ . »

Le nombre premier  $p$ , qui figure au second membre de l'équation

$$5m = 18x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

doit, dans les conditions où nous nous sommes placés, vérifier les

deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8}, \quad p \equiv 1 \pmod{3};$$

il ne peut donc être que de la forme  $24g + 19$ .

Les exemples les plus simples sont ceux de

$$m = 17, \quad m = 41, \quad m = 89.$$

Pour chacun des nombres que je viens d'écrire, on trouve une équation canonique, savoir

$$5.17 = 18.1^2 + 67.1^2,$$

puis

$$5.41 = 18.3^2 + 43.1^2,$$

enfin

$$5.89 = 18.3^2 + 283.1^2.$$

Même vérification pour

$$m = 113, \quad m = 137;$$

car on a

$$5.113 = 18.1^2 + 547.1^2,$$

et

$$5.137 = 18.3^2 + 523.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin les exemples.

*Théorème II.* — « Pour tout nombre premier donné  $m$ , de la » forme  $24k + 17$ , on peut poser au moins une fois (et toujours un » nombre impair de fois) l'équation

$$5m = 2x^2 + p^{l+1}y^2,$$

»  $x$  et  $y$  étant des entiers impairs, non divisibles par 3, et  $p$  un » nombre premier qui ne divise pas  $y$ . »

Dans les conditions spéciales de cet énoncé, le nombre premier  $p$

doit vérifier les deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{8}, \quad p \equiv 2 \pmod{3};$$

il ne peut donc être que de la forme  $24g + 11$ .

Vérifions à son tour le théorème II, en prenant d'abord

$$m = 17,$$

puis

$$m = 41.$$

Pour chacun de ces deux nombres, on trouve une équation canonique :

$$5.17 = 2.1^2 + 83.1^2,$$

puis

$$5.41 = 2.7^2 + 107.1^2.$$

On a trois équations canoniques pour

$$m = 89,$$

savoir

$$5.89 = 2.1^2 + 443.1^2,$$

$$5.89 = 2.7^2 + 347.1^2,$$

$$5.89 = 2.13^2 + 107.1^2;$$

trois aussi pour

$$m = 113,$$

car

$$5.113 = 2.1^2 + 563.1^2,$$

$$5.113 = 2.7^2 + 467.1^2,$$

$$5.113 = 2.13^2 + 227.1^2.$$

Ces exemples suffiront

