

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Théorèmes concernant le quintuple d'un nombre premier de l'une
ou de l'autre des deux formes $40\mu + 7$, $40\mu + 23$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 6 (1861), p. 109-112.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__109_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUINTUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE
DES DEUX FORMES $40\mu + 7$, $40\mu + 23$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous avons déjà donné (dans le cahier d'octobre 1860) deux théorèmes concernant respectivement les nombres premiers $40\mu + 7$ et les nombres premiers $40\mu + 23$: l'énoncé changeait suivant qu'on s'occupait de l'une ou de l'autre de ces deux classes de nombres premiers. Ici, au contraire, nous mêlons les deux classes et nous considérons le quintuple $(5m)$ d'un nombre premier m qui peut être indifféremment de la forme $40\mu + 7$ ou de la forme $40\mu + 23$ sans que nos énoncés changent.

Théorème I. — « Pour chaque nombre premier m , de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 7$, $40\mu + 23$, on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$5m = (10t + 1)^2 + 2p^{4t+1}y^2,$$

» t étant un entier quelconque, pair ou impair, positif, nul ou négatif, tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier et non diviseur de y . »

En d'autres termes, si du quintuple d'un nombre premier, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40\mu + 7, \quad 40\mu + 23,$$

on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2, \dots,$$

que la formule

$$(10t + 1)^2$$

fournit en y prenant $t = 0, t = \pm 1, t = \pm 2, \dots$, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{t+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y .

Il est bien évident que l'entier y est impair. Quant à la forme linéaire du nombre premier p , nous remarquerons que, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'équation

$$5m = (10t + 1)^2 + 2p^{t+1}y^2$$

entraîne ces deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{4}$$

et

$$p \equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

Il s'ensuit que p est de l'une des deux formes

$$20v + 13, \quad 20v + 17.$$

Nous nous bornerons aux exemples les plus simples en prenant d'abord $m = 7, m = 23, m = 47$. Pour chacun de ces nombres, on trouve une seule équation canonique, savoir

$$5.7 = 1^2 + 2.17.1^2,$$

puis

$$5.23 = 9^2 + 2.17.1^2,$$

enfin

$$5.47 = 1^2 + 2.13.3^2.$$

Notre théorème se vérifie également pour $m = 103$; mais on a alors

trois équations canoniques :

$$5.103 = 1^2 + 2.257.1^2,$$

$$5.103 = 11^2 + 2.197.1^2,$$

$$5.103 = 21^2 + 2.37.1^2.$$

Théorème II. — « Pour chaque nombre premier m , de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 7$, $40\mu + 23$, on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$5m = (10t + 3)^2 + 2p^{4t+1}y^2,$$

» t étant un entier quelconque, pair ou impair, positif, nul ou négatif,
 » tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier et non
 » diviseur de y . »

En d'autres termes, si du quintuple d'un nombre premier, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40\mu + 7, \quad 40\mu + 23,$$

on retranche, tant que faire se peut, les termes de la suite

$$3^2, 7^2, 13^2, 17^2, 23^2, \dots,$$

que la formule

$$(10t + 3)^2$$

fournit en y prenant $t = 0$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2$, etc., il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{4t+1}y^2,$$

p étant un nombre premier, non diviseur de y .

Il est bien évident que l'entier y est impair. Quant au nombre premier p , on trouve, comme pour le théorème I, qu'il doit être de l'une des deux formes

$$20\nu + 13, \quad 20\nu + 17.$$

Cette fois encore, nous nous bornerons aux exemples les plus

simples. Faisant d'abord $m = 7$, $m = 23$, $m = 47$, nous trouverons notre théorème confirmé par les équations canoniques respectives

$$5.7 = 3^2 + 2.13.1^2,$$

puis

$$5.23 = 3^2 + 2.53.1^2,$$

enfin

$$5.47 = 3^2 + 2.113.1^2.$$

Il l'est également pour $m = 103$; car on a alors les trois équations canoniques que voici :

$$5.103 = 7^2 + 2.233.1^2,$$

$$5.103 = 13^2 + 2.173.1^2,$$

$$5.103 = 17^2 + 2.113.1^2.$$

Nous ne voyons aucun intérêt à pousser plus loin ces vérifications numériques.

