JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 27$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 107-108.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__107_0>

THÉORÈME
CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 27$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $40\mu + 27$. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = (10t + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

t étant un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier et non diviseur de y : nous admettons pour l la valeur zéro. On demande une règle facile qui dise à priori si le nombre N des décompositions de m est pair ou impair, zéro étant compté comme nombre pair.

Ici, comme pour la question analogue traitée dans l'article précédent pour les nombres premiers $40\mu + 3$, nous nous servirons de l'équation

$$m = a^2 + 2b^2$$

qui continue à avoir lieu, parce que les nombres premiers $40\mu + 27$ sont eux aussi $\equiv 3 \pmod{8}$. Et la conclusion sera la même, à savoir que, cette fois encore, N est impair quand a est divisible par 5, mais pair quand a est premier à 5.

Les entiers fournis par la formule générale

$$(10t + 1)^2,$$

en y faisant successivement $t = 0$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2, \ldots$, sont

$$1^2,\ 9^2,\ 11^2,\ 19^2,\ 21^2, \ldots;$$

vérifions d'après cela notre théorème en prenant pour m les nombres premiers $40\mu + 27$ les plus petits, savoir :

$$67,\quad 107,\quad 227.$$

Comme on a

$$67 = 7^2 + 2.3^2,$$
$$107 = 3^2 + 2.7^2,$$
$$227 = 15^2 + 2.1^2,$$

ce qui donne pour a les valeurs respectives

$$7,\quad 3,\quad 15,$$

on voit que N doit être impair pour 227, mais pair pour 67 et 107. Or on a, en effet, $N = 0$ pour $m = 67$; puis $N = 2$ pour $m = 107$, à cause des équations canoniques

$$107 = 1^2 + 2.53.1^2,$$
$$107 = 9^2 + 2.13.1^2;$$

enfin $N = 3$, pour $m = 227$: dans ce dernier exemple, les équations canoniques sont

$$227 = 1^2 + 2.113.1^2,$$
$$227 = 9^2 + 2.73.1^2,$$
$$227 = 11^2 + 2.53.1^2.$$

Le nombre premier p qui figure au second membre de l'équation

$$m = 40\mu + 27 = (10t + 1)^2 + 2p^{4l+1}y^2$$

doit évidemment vérifier les deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{4}, \qquad p \equiv \pm 3 \pmod{5};$$

il est donc, comme dans l'article précédent, de l'une ou de l'autre des deux formes $20g + 13$, $20g + 17$.