

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 3$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 6 (1861), p. 105-106.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__105_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 3$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné, de la forme $40\mu + 3$. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$m = (10t + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

t étant un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif, tandis que y et p sont impairs et positifs, de plus p premier et non diviseur de y : nous admettons pour l la valeur zéro. On demande une règle facile qui dise à priori si le nombre N des décompositions de m ainsi obtenues est pair ou impair, zéro étant compté comme nombre pair.

Pour répondre à cette question, j'observe que le nombre premier m étant de la forme $40\mu + 3$ est $\equiv 3 \pmod{8}$ et que par conséquent on peut poser, d'une seule manière, en nombres entiers,

$$m = a^2 + 2b^2.$$

Or tout dépend ici de la valeur de $a \pmod{5}$; car N est impair quand a est divisible par 5, mais pair quand a est premier à 5.

Les entiers fournis par la formule générale

$$(10t + 3)^2$$

en y faisant successivement $t = 0, t = \pm 1, t = \pm 2, \dots$, sont

$$3^2, 7^2, 13^2, 17^2, 23^2, \dots;$$

vérifions, d'après cela, notre théorème en prenant pour m les nombres

premiers $40\mu + 3$ les plus petits, savoir

$$3, 43, 83, 163, 283.$$

Comme on a

$$3 = 1^2 + 2.1^2,$$

$$43 = 5^2 + 2.3^2,$$

$$83 = 9^2 + 2.1^2,$$

$$163 = 1^2 + 2.9^2,$$

$$283 = 11^2 + 2.9^2,$$

ce qui donne pour a les valeurs respectives

$$1, 5, 9, 1, 11,$$

on voit que N doit être impair pour 43, mais pair pour 3, 83, 163 et 283. Or on trouve en effet $N = 1$ pour $m = 43$, en vertu de l'équation canonique

$$43 = 3^2 + 2.17.1^2,$$

tandis que l'on a $N = 0$ pour $m = 3$ et $m = 163$, et $N = 2$ pour $m = 83$ et $m = 283$, les équations canoniques étant, dans ces deux derniers exemples,

$$83 = 3^2 + 2.37.1^2,$$

$$83 = 7^2 + 2.17.1^2,$$

puis

$$283 = 3^2 + 2.137.1^2,$$

$$283 = 7^2 + 2.13.3^2.$$

Le nombre premier p qui figure au second membre de l'équation

$$m = (10t + 3)^2 + 2p^{t+1}j^2$$

doit, dans les conditions où nous nous sommes placés, vérifier les deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{4}, \quad p \equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

Il est donc toujours de l'une ou de l'autre des deux formes $20g + 13$, $20g + 17$.