JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $24\kappa + 13$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 101-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__101_0>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24k+13$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Le théorème que nous voulons énoncer ici, au sujet des nombres premiers de la forme $24k+13$, consiste en ce que pour chaque nombre donné m, de cette espèce, on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$m = 6x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier $(24g+7)$ qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m, de la forme $24k+13$, on retranche, tant que faire se peut, le sextuple des carrés des nombres impairs 1, 3, etc., il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y. Quant à la forme linéaire $(24g+7)$ que nous attribuons à p, c'est une conséquence immédiate de l'équation

$$m = 6x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

qui, dans les conditions où nous nous sommes placés, entraîne ces deux congruences

$$p \equiv 7 \pmod{8}$$

et

$$p \equiv 1 \pmod{3}.$$

Le nombre premier le plus petit que la formule

$$24k + 13$$

puisse nous offrir est 13. Or on a

$$13 = 6.1^2 + 7.1^2,$$

ce qui s'accorde avec notre théorème, le nombre premier 7 se déduisant de la formule

$$24g + 7,$$

en y prenant $g = 0$.

En prenant $k = 1$, on a encore un nombre premier, savoir 37, et l'équation canonique

$$37 = 6.1^2 + 31.1^2.$$

Soit à présent $k = 2$, d'où $m = 61$; c'est encore un nombre premier, et l'on a encore une seule équation canonique :

$$61 = 6.3^2 + 7.1^2.$$

En posant $k = 3$, on trouverait un nombre composé; mais pour $k = 4$, on a le nombre premier 109, et l'équation canonique

$$109 = 6.1^2 + 103.1^2.$$

Toujours notre théorème est vérifié.